МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2010

Задания С6

Корянов А.Г. *г. Брянск*

Замечания и пожелания направляйте по адресу: akoryanov@mail.ru

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

(от учебных задач до олимпиадных задач)

Содержание

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Метод прямого перебора

● В клетке сидят кролики и фазаны. Всего у них 18 ног. Узнать сколько в клетке тех и других. Укажите все решения.

Решение. Пусть x – количество кроликов, y – количество фазанов, тогда имеем уравнение $4x+2y=18$ или $2x+y=9$.

Если $x=1$, то $y=7$.

Если $x=2$, то $y=5$.

Если $x=3$, то $y=3$.

Если $x=4$, то $y=1$.

При $x=5$ получаем $2\cdot 5=10>9$.

Ответ: (1;7), (2;5), (3;3), (4;1).

2. Использование неравенств

● Решите в натуральных числах уравнение $5x+8y=39$.

Решение. Для уменьшения перебора вариантов рассмотрим неравенства

$$\begin{cases}5x=39-8y\ge 0\\ 8y=39-5x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\le 4\\ x\le 7\end{cases}$$

Проведем перебор по неизвестной y.

Если $y=1$, то $x=6{,}2$ не является натуральным числом.

Если $y=2$, то $x=4{,}6$ не является натуральным числом.

Если $y=3$, то $x=3$.

Если $y=4$, то $x=1{,}4$ не является натуральным числом.

Ответ: (3; 3).

3. Использование отношения делимости

● Имеются контейнеры двух видов: по 130 кг и 160 кг. Сколько было контейнеров первого и сколько второго вида, если вместе они весят 3 тонны? Укажите все решения.

Решение. Обозначим количество контейнеров первого вида через x, второго – через y. Получаем уравнение $130x+160y=3000$ или $13x+16y=300$. Далее имеем

$13x+13y+3y=13\cdot 23+1$, $3y-1=13(23-x-y)$.

Отсюда следует, что разность $3y-1$ делится на 13.

Если $3y-1=0$, то y не является натуральным числом.

Если $3y-1=13$, то y не является натуральным числом.

Если $3y-1=26$, то $y=9$ и $x=12$.

Если $3y-1=39$, то y не является натуральным числом.

Если $3y-1=52$, то y не является натуральным числом.

Если $3y-1=65$, то $y=22$, но $16\cdot 22=352>300$.

Ответ: 12 контейнеров по 130 кг и 9 по 160 кг.

4. Выделение целой части

● У осьминога 8 ног, а у морской звезды 5. Сколько в аквариуме тех и других, если всего у них 39 ног?

Решение. Пусть x – количество осьминогов, y – количество морских звезд, тогда получаем уравнение $8x+5y=39$. Выразим y из уравнения и выделим целую часть:

$y=\dfrac{39-8x}{5}=7-x-\dfrac{3x-4}{5}$. Отсюда следует, что разность $3x-4$ делится на 5.

Если $3x-4=0$, то x не является натуральным числом.

Если $3x-4=5$, то $x=3$ и $y=3$.

Если $3x-4=10$, то x не является натуральным числом.

Если $3x-4=15$, то x не является натуральным числом.

Если $3x-4=20$, то $x=8$, но $8\cdot 8=64>39$.

Ответ: 3 и 3.

Замечание. В двух последних примерах использовано отношение делимости, при этом уравнения приводились к разному виду.

5. Метод остатков

● Решите уравнение $3x-4y=1$ в целых числах.

Решение. Перепишем уравнение в виде $3x=4y+1$. Поскольку левая часть уравнения делится на 3, то должна делиться на 3 и правая часть. Рассмотрим три случая.

1) Если $y=3m$, где $m\in Z$, то $4y+1=12m+1$ не делится на 3.

2) Если $y=3m+1$, то $4y+1=4(3m+1)+1=12m+5$ не делится на 3.

3) Если $y=3m+2$, то $4y+1=4(3m+2)+1=12m+9$ делится на 3, поэтому $3x=12m+9$, $x=4m+3$.

Ответ: $x=4m+3$, $y=3m+2$, где $m\in Z$.

6. Метод «спуска»

● Решите в целых числах уравнение $5x-7y=3$.

Решение. Выразим из уравнения то неизвестное, коэффициент при котором меньше по модулю: $x = \frac{7y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}$. Дробь $\frac{2y+3}{5}$ должна быть равна целому числу. Положим $\frac{2y+3}{5} = z$, где z – целое число. Тогда $2y+3=5z$. Из последнего уравнения выразим то неизвестное, коэффициент при котором меньше по модулю, и проделаем аналогичные преобразования: $y = \frac{5z-3}{2} = 3z - \frac{z+3}{2}$. Дробь $\frac{z+3}{2}$ должна быть целым числом. Обозначим $\frac{z+3}{2} = t$, где t – целое число. Отсюда $z = 2t-3$. Последовательно возвращаемся к неизвестным x и y:
$y = 3(2t-3) - t = 5t - 9$,
$x = y + z = 5t - 9 + 2t - 3 = 7t - 12$.
Ответ: $x = 7t - 12$, $y = 5t - 9$, где $t \in Z$.

7. Метод последовательного уменьшения коэффициентов по модулю

● Решите в целых числах уравнение
$79y - 23x = 1$.
Решение. Проведем деление с остатком
$79 = 23 \cdot 3 + 10$ и перепишем исходное уравнение в виде $23x = 79y - 1 = 69y + 10y - 1$,
$23x - 69y = 10y - 1$. Левая часть последнего уравнения делится нацело на 23, поэтому и правая часть должна делиться на 23. Имеем
$10y - 1 = 23t$, где $t \in Z$.
Для полученного нового уравнения повторим процедуру уменьшения коэффициентов.
$10y = 23t + 1 = (2 \cdot 10 + 3)t + 1$; $10y - 20t = 3t + 1$;
$3t + 1 = 10u$, где $u \in Z$.
Проведем еще раз процедуру уменьшения коэффициентов.
$3t + 1 = 10u = (3 \cdot 3 + 1)u$; $3t - 9u = u - 1$;
$u - 1 = 3n$, $n \in Z$.
Выразим x и y через n. Так как $u = 3n + 1$, то
$3t = 10u - 1 = 10(3n+1) - 1 = 30n + 9$; $t = 10n + 3$.
$10y = 23t + 1 = 23(10n+3) + 1 = 230n + 70$;
$y = 23n + 7$.
$23x = 79y - 1 = 79(23n+7) - 1 = 79 \cdot 23n + 552$;
$x = 79n + 24$.
Ответ: $x = 79n + 24$; $y = 23n + 7$, где $n \in Z$.
Замечание. В последних двух примерах применен метод последовательного уменьшения коэффициентов по модулю, при этом уравнения приводились к разному виду.

8. Использование формул

Теорема. Уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда $d \mid b$, где $d = \text{НОД}(a_1, a_2, ..., a_n)$.
Теорема. Пусть уравнение $ax + by = c$ разрешимо в Z и пара $(x_0; y_0)$ является частным решением этого уравнения. Тогда множеством всех решений в Z данного уравнения является множество пар $(x; y)$, где

$$\begin{cases} x = x_0 - \dfrac{b}{d} \cdot t \\ y = y_0 + \dfrac{a}{d} \cdot t \end{cases} \quad \text{где } t \in Z.$$

Следствие. Пусть a и b взаимно просты и $(x_0; y_0)$ - какое-нибудь решение уравнения

$$ax + by = c \quad (*)$$

Тогда формулы

$$x = x_0 - b \cdot t,$$
$$y = y_0 + a \cdot t$$

при $t \in Z$ дают все решения уравнения (*).

● Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 30? (МГУ, 1969)
Решение. Из условия задачи следует, что существует натуральное число k такое, что
$n = 6k + 4$. Аналогично имеем $n = 15l + 7$, где $l \in N$. Исключая из этих двух равенств n, получим уравнение $2k - 5l = 1$. (*)
Для решения этого уравнения найдем какое-нибудь частное решение в целых (не обязательно неотрицательных) числах. Подбором в качестве такого частного решения можно взять, например, $k = -2$, $l = -1$. Согласно следствия уравнение (*) имеет решения $k = -2 + 5t$, $l = -1 + 2t$, где $t \in Z$. Чтобы числа k и l были неотрицательными, параметр t должен принимать натуральные значения. Теперь имеем
$n = 6(5t-2) + 4 = 30t - 8 = 30(t-1) + 22$.
Ответ: 22.
● Решите уравнение $147x - 25y = 14$ в целых числах.

Решение. Числа 147 и –25 взаимно просты, следовательно, уравнение разрешимо в $\boldsymbol{Z}$. Найдем одно частное решение:

$$147 = (-25)\cdot(-5) + 22,$$

$$-25 = 22\cdot(-2) + 19,$$

$$22 = 19\cdot 1 + 3,$$

$$19 = 3\cdot 6 + 1.$$

$$1 = 19 - 3\cdot 6 = 19 - 6\cdot(22 - 19) = 7\cdot 19 - 6\cdot 22 =$$

$$= 7\cdot(-25 - 22\cdot(-2)) - 6\cdot 22 = 7\cdot(-25) + 8\cdot 22 =$$

$$= 7\cdot(-25) + 8\cdot(147 + 5\cdot(-25)) = 8\cdot 147 + 47\cdot(-25).$$

Итак, $1 = 147\cdot 8 + (-25)\cdot 47$. Следовательно,

$$14 = 147\cdot 112 - 25\cdot 658.$$

Значит, пара чисел (112; 658) образует частное решение данного уравнения. Следовательно, общее решение
$\begin{cases} x = 112 + 25t \\ y = 658 + 147t, \end{cases}$ где $t \in Z$.

9. Использование конечных цепных дробей

● Решите в целых числах уравнение
$127x - 52y + 1 = 0$

Решение. Преобразуем отношение коэффициентов при неизвестных. Прежде всего, выделим целую часть неправильной дроби $\frac{127}{52}$;

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{23}{52}$$

Правильную дробь $\frac{23}{52}$ заменим равной ей дробью $\frac{1}{\frac{52}{23}}$.

Тогда получим $\frac{127}{52} = 2 + \frac{1}{\frac{52}{23}}$. Проделаем такие же преобразования с полученной в знаменателе неправильной дробью $\frac{52}{23}$.

Теперь исходная дробь примет вид:
$$\frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{23}{6}}}$$

Повторяя те же рассуждения для дроби $\frac{23}{6}$ получим $\frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{6}{5}}}}$.

Выделяя целую часть неправильной дроби $\frac{6}{5}$, придем к окончательному результату:

$$\frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}$$

Мы получили выражение, которое называется *конечной цепной* или *непрерывной дробью.* Отбросив последнее звено этой цепной дроби - одну пятую, превратим получающуюся при этом новую цепную дробь в простую и вычтем ее из исходной дроби $\frac{127}{52}$:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}=2+\frac{4}{9}=\frac{22}{9},$$

$$\frac{127}{52}-\frac{22}{9}=\frac{1143-1144}{52\cdot 9}=-\frac{1}{52\cdot 9}.$$

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и отбросим его, тогда

$$127\cdot 9-52\cdot 22+1=0.$$

Из сопоставления полученного равенства с уравнением $127x-52y+1=0$ следует, что $x=9$, $y=22$ будет решением этого уравнения, и согласно теореме все его решения будут содержаться в формулах $x=9+52t$, $y=22+127t$, где $t\in Z$.

Ответ: $x=9+52t$, $y=22+127t$, где $t\in Z$.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Метод разложения на множители

а) вынесение общих множителей за скобку

● Решите уравнение $2x^3+xy-7=0$ в целых числах.

Решение. Приведем данное уравнение к виду $x(2x^2+y)=7.$ Так как $7=1\cdot 7=7\cdot 1=-1\cdot(-7)=-7\cdot(-1),$ то рассмотрим четыре системы

1) $\begin{cases}x=1\\2x^2+y=7\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=7\\2x^2+y=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}x=-1\\2x^2+y=-7\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x=-7\\2x^2+y=-1\end{cases}$

Из каждой системы получаем решения.

Ответ: $(1;5)$; $(-1;-9)$; $(7;-97)$; $(-7;-99)$.

б) применение формул сокращенного умножения

● Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55.

Решение. Запишем условие задачи в виде уравнения $n^2-k^2=55$ или $(n-k)(n+k)=55.$ Поскольку $n-k<n+k$ и $55=1\cdot 55=5\cdot 11,$ то возможны два случая

$\begin{cases}n-k=1\\n+k=55\end{cases}$ или $\begin{cases}n-k=5\\n+k=11\end{cases}$

Решая эти уравнения, получим два ответа: $n=28,\ k=27$ и $n=8,\ k=3.$

Ответ: $(28;27)$; $(8;3)$.

в) способ группировки

● Решите уравнение $xy+3x-y=6$ в целых числах.

Решение. Запишем уравнение в виде $x(y+3)-(y+3)=3$ или $(x-1)(y+3)=3.$ Так как $3=1\cdot 3=3\cdot 1=-1\cdot(-3)=-3\cdot(-1),$ то рассмотрим четыре системы

1) $\begin{cases}x-1=1\\y+3=3\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-1=3\\y+3=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}x-1=-1\\y+3=-3\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-1=-3\\y+3=-1\end{cases}$

Из каждой системы получаем решения.

Ответ: $(4;-2)$; $(-2;-4)$; $(2;0)$; $(0;-6)$.

г) разложение квадратного трехчлена

● Решите уравнение $x^2-3xy+2y^2=11$ в целых числах.

Решение. Решим уравнение $x^2-3xy+2y^2=0$ относительно неизвестной x: $x_1=y$ и $x_2=2y.$ Тогда получаем $(x-y)(x-2y)=11.$ Так как $11=1\cdot 11=11\cdot 1=-1\cdot(-11)=-11\cdot(-1),$ то рассмотрим четыре системы

1) $\begin{cases}x-y=1\\x-2y=11\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=11\\x-2y=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}x-y=-1\\x-2y=-11\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-y=-11\\x-2y=-1\end{cases}$

Из каждой системы получаем решения.

Ответ: $(21;10)$; $(-9;-10)$; $(-21;-10)$; $(9;10)$.

д) использование параметра

● Решите уравнение $2x^2-2xy+9x+y=2$ в целых числах.

Решение. Перепишем уравнение в виде $2x^2-x(2y-9)+y-2+a=a$ и разложим левую часть уравнения на множители как квадратный трехчлен относительно x. Находим дискриминант $D=4y^2-44y+97-8a$. Очевидно, если $97-8a=121$, то дискриминант будет полным квадратом. При этом $a=-3$ и $x=\dfrac{2y-9\pm(2y-11)}{4}$. Отсюда $x_1=0{,}5$ и $x_2=y-5$. Уравнение принимает вид $(2x-1)(x-y+5)=-3$. Рассмотрите самостоятельно решение последнего уравнения.

Ответ: $(1;9)$; $(-1;3)$; $(2;8)$; $(0;2)$.

2. Метод решения относительно одной переменной

а) выделение целой части

● Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению

$3xy+14x+17y+71=0$. (МГУ, 1997)

Решение. Выразим из данного уравнения y через x:

$$y=-\frac{14x+71}{3x+17}.$$

При этом следует отметить, что величина $3x+17\neq 0$ (так как x – целое число).

Выделим из дроби в правой части этого равенства правильную алгебраическую дробь (у которой степень числителя меньше степени знаменателя):

$$y=-\frac{4(3x+17)+2x+3}{3x+17}=-4-\frac{2x+3}{3x+17}.$$

Умножим обе части последнего равенства на 3:

$$3y=-12-\frac{6x+9}{3x+17}=-12-2+\frac{25}{3x+17}$$

$$\text{или}\quad 3y+14=\frac{25}{3x+17}.$$

Поскольку числа $3y$ и 14 – целые, то $3x+17$ должно быть делителем числа 25:

$3x+17=\pm1;\pm5;\pm25$ - всего 6 возможностей.

Отсюда для x получаем три возможных значения: –4, –6, –14 (в остальных трех случаях x не является целым). Соответствующие значения y равны –3, –13, –5.

Ответ: $(-4;-3)$; $(-6;-13)$; $(-14;-5)$.

Замечание. В решении был использован прием домножения обеих частей равенства на коэффициент при x в знаменателе. Этот прием домножения также удобно использовать при решении уравнений методом разложения на множители.

б) использование дискриминанта (неотрицательность)

● Решите уравнение $3(x^2+xy+y^2)=x+8y$ в целых числах.

Решение. Рассмотрим уравнение, как квадратное относительно x: $3x^2+(3y-1)x+3y^2-8y=0$.

Найдем дискриминант уравнения $D=-27y^2+90y+1$. Данное уравнение имеет корни, если $D\geq 0$, т.е. $-27y^2+90y+1\geq 0$.

Так как $y\in Z$, то получаем $0\leq y\leq 3$. Перебирая эти значения, получим, что исходное уравнение в целых числах имеет решения $(0;0)$ и $(1;1)$.

Ответ: $(0;0)$; $(1;1)$.

в) использование дискриминанта (полный квадрат)

● Решите уравнение $x^2-xy+y^2=x+y$ в целых числах.

Решение. Рассмотрим уравнение, как квадратное относительно x: $x^2-(y+1)x+y^2-y=0$.

Его дискриминант $D=-3y^2+6y+1=t^2$ должен быть квадратом некоторого целого числа t.

Получаем новое уравнение $3y^2-6y-1+t^2=0$; $3(y-1)^2+t^2=4$. Из последнего уравнения следует, что $t^2\leq 4$, т.е. $|t|\leq 2$.

1) Если $t^2=0$, то уравнение $3(y-1)^2=4$ не имеет целого решения y.

2) Если $t^2=1$, то уравнение $3(y-1)^2=3$ имеет целые решения $y_1=2$ и $y_2=0$. При $y=2$ получаем квадратное уравнение $x^2-3x+2=0$ с корнями $x=1$ или $x=2$. При $y=0$ получаем квадратное уравнение $x^2-x=0$ с корнями $x=0$ или $x=1$.

3) Если $t^2=4$, то уравнение $3(y-1)^2=0$ имеет одно целое решение $y=1$. При $y=1$ получаем квадратное уравнение $x^2-2x=0$ с корнями $x=0$ или $x=2$.

Ответ: $(1;2)$; $(2;2)$; $(0;0)$; $(1;0)$, $(0;1)$; $(2;1)$

3. Метод оценки

а) использование известных неравенств

● Решите в натуральных числах уравнение
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}.$$

Решение. Пусть для определенности $x \le y$. Проведем перебор для первых значений неизвестной x.

1) Если $x=1$, то получаем неверное равенство $1+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, так как $1+\frac{1}{y}>1$ при любых натуральных y.

2) Если $x=2$, то получаем неверное равенство $\frac{1}{2}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, так как $\frac{1}{2}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$ при любых натуральных y.

3) Если $x=3$, то получаем $\frac{1}{3}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$, $y=6$.

4) Если $x=4$, то получаем $\frac{1}{4}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$, $y=4$.

5) Если $x=5$, то получаем $\frac{1}{5}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y}=\frac{3}{10}$, $y=\frac{10}{3}\notin N$.

Пусть $x\ge 6$. По условию $y \ge x$, следовательно, $y\ge 6$. Тогда $\frac{1}{x}\le\frac{1}{6}$, $\frac{1}{y}\le\frac{1}{6}$, а значит, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$. Таким образом, при $x\ge 6$ и $y \ge x$ исходное уравнение решений не имеет.

Заметим, что в уравнении $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ неизвестные x и y равноправны, поэтому снимая условие $y\ge x$, имеем еще одно решение $(6;3)$. Кроме того, можно сделать вывод, что при $x\ge 6$ и $y\ge 6$ исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: $(4;4)$; $(6;3)$; $(3;6)$.

● Решите в целых числах уравнение
$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}=3. \text{ (ММО, 1963, 8 класс)}$$

Решение. Можно вначале найти решения только в натуральных числах, так как если $(x_0;y_0;z_0)$ - решение, то, изменив знак у любых двух чисел этой тройки, снова получим решение. Данное уравнение умножим на $2xyz$ и воспользуемся неравенством $a^2+b^2\ge 2ab$;

$6xyz=2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2=$
$=(x^2y^2+x^2z^2)+(x^2y^2+y^2z^2)+(x^2z^2+y^2z^2)\ge$
$\ge 2x^2yz+2y^2xz+2z^2xy=2xyz(x+y+z)$, откуда $x+y+z\le 3$. Но x, y, z – натуральные, поэтому $x=y=z=1$ единственное решение в натуральных числах. Остальные решения исходного уравнения таковы: $(-1;-1;1)$; $(1;-1;-1)$; $(-1;1;-1)$.

Ответ: $(1;1;1)$; $(-1;-1;1)$; $(1;-1;-1)$; $(-1;1;-1)$.

б) приведение к сумме неотрицательных выражений

● Решите в целых числах уравнение $x+y=x^2-xy+y^2$. (ММО, 1941, 9-10 классы)

Решение. Приведем уравнение к виду $(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2=2$. Так как $(x-1)^2\le 2$, то имеем $(x-1)^2=0$ или $(x-1)^2=1$. Отсюда получаем три значения x: 1, 0, 2. Подставляя эти значения в исходное уравнение, найдем значения y.

Ответ: $(0;0);(1;0);(0;1);(2;1);(1;2);(2;2)$.

4. Метод остатков

● Решите в целых числах уравнение $3^m+7=2^n$.

Решение. 1) Если $m<0$, то уравнение не имеет решений в целых числах. Действительно, $0<3^m<1$, тогда правая часть уравнения $3^m=2^n-7$ является целым числом при $n\ge 0$ (что невозможно) или правая часть уравнения $7=2^n-3^m$ меньше 7 при $n<0$.

2) Пусть $m=0$, тогда из уравнения $2^n=8$ получаем $n=3$.

3) Теперь считаем, что $m>0$. Так как уравнение содержит степень с основанием 3, то имеет смысл рассмотреть остатки при делении на 3. Левая часть исходного уравнения при делении на 3 имеет остаток 1. Когда правая часть 2^n имеет остаток 1? Легко показать, что при четном $n=2k$ выражение
$2^{2k}=4^k=(3+1)^k=3^k+3^{k-1}+...+3+1=3t+1$
имеет остаток 1. При нечетном $n=2k+1$ выра-

жение $2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k = 2(3t+1) = 6t+2$ имеет остаток 2.
Итак, $n = 2k$. Тогда уравнение запишем в виде $3^m = 2^{2k} - 7 = 4^k - 7$. Правая часть последнего уравнения имеет остаток 1 при делении на 4 (число -7 попадает в множество-класс остатков, содержащее 1). Когда левая часть 3^n имеет остаток 1? Легко показать, что при четном $m = 2p$ выражение
$3^{2p} = 9^p = (8+1)^p = 8^k + 8^{k-1} + ... + 8 + 1 = 8s + 1$
имеет остаток 1. При нечетном $m = 2p+1$ выражение $3^{2p+1} = 3 \cdot 9^p = 3(8s+1) = 24s + 3$ имеет остаток 3.
Итак, $m = 2p$. Тогда уравнение запишем в виде $2^{2k} - 3^{2p} = 7$ или $(2^k - 3^p)(2^k + 3^p) = 7$. Так как $2^k + 3^p > 2^k - 3^p$ и $2^k + 3^p > 0$, то имеем единственный случай
$\begin{cases} 2^k + 3^p = 7 \\ 2^k - 3^p = 1. \end{cases}$ Отсюда получаем $k = 2,\ p = 1$ и $m = 2,\ n = 4$.
Ответ: $m = 2,\ n = 4$ или $m = 0,\ n = 3$

5. Метод «спуска»

а) конечного «спуска»

● Решите уравнение $2x^2 - 5y^2 = 7$ в целых числах.
Решение. Так как $2x^2$ - четное число, а 7 - нечетное, то $5y^2$ должно быть нечетным, т.е. y – нечетное. Пусть $y = 2z+1,\ z \in Z$, тогда данное уравнение можно переписать в виде
$x^2 - 10z^2 - 10z = 6.$
Отсюда видно, что x должно быть четным.
Пусть $x = 2m$, тогда последнее уравнение примет вид $2m^2 - 5z(z+1) = 3$, что невозможно, так как число $z(z+1)$ - четно, а разность двух четных чисел не может быть равна нечетному числу. Таким образом, данное уравнение не имеет решений в целых числах.
Ответ: нет решений.

б) бесконечного «спуска»

● Решите в целых числах уравнение
$2x^2 - 5y^2 = z^2$.
Решение. Запишем уравнение в виде
$2x^2 - z^2 = 5y^2$. Отсюда следует, что левая часть последнего уравнения кратна 5. Рассмотрим остатки при делении выражения $2x^2 - z^2$ на 5.

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
$2x^2$	0	2	3	3	2

Из таблицы видно, что для разрешимости в целых числах исходного уравнения числа x и z должны быть кратны 5.
Предположим, что $x = 5x_1,\ z = 5z_1$, тогда исходное уравнение (после сокращения на 5) примет вид $10{x_1}^2 - y^2 = 5{z_1}^2$. Отсюда следует, что значения y кратны 5, т.е. $y = 5y_1$. Последнее уравнение (после сокращения на 5) примет тот же вид $2{x_1}^2 - 5{y_1}^2 = {z_1}^2$, что и исходное уравнение.
Из приведенных рассуждений следует, что числа x, y и z должны быть кратными 5, далее числа x_1, y_1, z_1, т.е. $\frac{x}{5}, \frac{y}{5}, \frac{z}{5}$ также кратны 5.
Итак, оказалось, что числа, удовлетворяющие исходному уравнению, должны делиться на 5, и сколько бы раз не делили эти числа, будем получать новые числа, которые также делятся на 5 и удовлетворяют уравнению. Единственное число, обладающее этим свойством, есть нуль. Следовательно, уравнение $2x^2 - 5y^2 = z^2$ имеет единственное решение в целых числах $(0;0;0)$.
Ответ: $(0;0;0)$.

6. Метод от противного

● Решите в целых числах уравнение
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz. \qquad (*)$$
Решение. Одно решение очевидно: $x = y = z = 0$. Покажем, что других решений в целых числах уравнение не имеет. Будем доказывать от противного. Пусть x, y, z - ненулевое решение исходного уравнения. Так как $x^2 + y^2 + z^2$ - четное число, то, по крайней мере, одно из чисел x, y, z - четное. Используя симметрию уравнения (*), предположим, что $x = 2x_1$ - четное число. Тогда $4x_1^2 + y^2 + z^2 = 4x_1yz$, а значит, $y^2 + z^2$ кратно 4. Это может быть лишь в том случае, когда y и z - четные. Действительно, если одно из этих чисел четное, а другое нечетное, то число $y^2 + z^2$ - нечетное и 4 не делит $y^2 + z^2$. Если же оба эти числа (z и y) нечетные, то выражение
$$y^2 + z^2 = (2u+1)^2 + (2v+1)^2 =$$

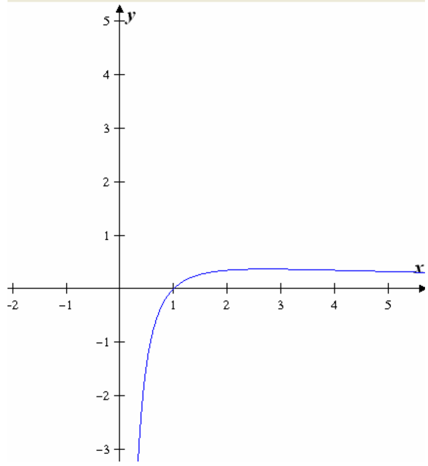
$= 4(u^2 + v^2 + u + v) + 2$
при делении на 4 имеет остаток 2.
Подставив $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$ в исходное уравнение, получим
$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2^2 x_1 y_1 z_1.$$
Повторением приведенных выше рассуждений доказывается, что $2|x_1$, $2|y_1$, $2|z_1$ (т.е. x_1 кратно 2, y_1 кратно 2, z_1 кратно 2), следовательно, и $2^2|x$, $2^2|y$, $2^2|z$. Рассуждая аналогично, получим, что для любого $n \in \mathbf{N}$ $2^n|x$, $2^n|y$, $2^n|z$ Противоречие. Следовательно, уравнение (*) имеет единственное решение (0,0,0).
Ответ: (0; 0; 0).
Замечание. При решении данного примера в сочетании с методом от противного использовался метод бесконечного «спуска».

7. Параметризация уравнения

● Решите уравнение $x^3 + y^3 + z^3 = 2$ в целых числах.
Решение. Положим $x = a + b$, $y = a - b$. Так как $x^3 + y^3 = 2a^3 + 6ab^2$, то исходное уравнение принимает вид $2a^3 + 6ab^2 + z^3 = 2$.
Положив $a = 1$, получим $z^3 = -6b^2$. Считаем теперь $b = 6t^3$. Отсюда $x = 1 + 6t^3$, $y = 1 - 6t^3$, $z = -6t^2$. Таким образом, получено бесконечное множество решений исходного уравнения, соответствующих целочисленным значениям параметра t.
Ответ: $x = 1 + 6t^3$, $y = 1 - 6t^3$, $z = -6t^2$, где $t \in Z$.

8. Функционально-графический метод

● (2010) Найдите все пары натуральных k и n таких, что $k < n$ и $(n)^k = (k)^n$.
Решение. 1) Преобразуем исходное равенство:
$$(n)^k = (k)^n \iff k \ln n = n \ln k \iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln k}{k} \iff$$
$$\iff f(n) = f(k), \text{ где } f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$
2) $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, поэтому $f'(x) \le 0$ при $x \ge e$ и $f'(x) \ge 0$ при $0 < x \le e$. Значит, функция $f(x)$ возрастает на $(0; e]$ и убывает на $[e; +\infty)$. Так как $k < n$, равенство $f(n) = f(k)$ может выполняться только при условии $k < e < n$, откуда следует $k = 1$ или $k = 2$, причем для каждого k может найтись не более одного значения n, удовлетворяющего уравнению в паре с этим значением k.



3) В случае $k = 1$ из данного уравнения получаем $n = 1$, что не соответствует условию $k < n$.
4) В случае $k = 2$ получаем уравнение $n^2 = 2^n$, решение которого легко находится подбором: $n = 4$, причем в силу вышесказанного это единственное решение $n > e$.
Ответ: $k = 2$, $n = 4$.

НЕРАВЕНСТВА

1. Метод математической индукции

● Найдите все целые решения неравенства $x - 1 < \log_6(x + 3)$. (МГУ, 1972)
Решение. Допустимые значения x определяются из условия $x + 3 > 0$, $x \in Z$, т.е. $x = -2, -1, 0, 1, \ldots$ Начнем последовательно проверять:
1) $x = -2$. Получаем $-3 < \log_6 1 = 0$ (верно).
2) $x = -1$. Получаем $-2 < 0 < \log_6 2$ (верно).
3) $x = 0$. Получаем $-1 < 0 < \log_6 3$ (верно).
4) $x = 1$. Получаем $0 < \log_6 4$ (верно).
Для остальных целых x неравенство не выполняется. Докажем по индукции неравенство
$$n - 1 > \log_6(n + 3), \quad n \ge 2, \quad n \in N.$$
База индукции: $n = 2$ и $1 = \log_6 6 > \log_6 5$ (верно).
Индуктивный переход: для любого целого $n = k \ge 2$, если выполнено
$$k - 1 > \log_6(k + 3), \quad (*)$$
то и выполнено для $n = k + 1$
$$(k + 1) - 1 = k > \log_6(k + 4).$$

Прибавим к неравенству (*) по 1 и проверим, что справедливо неравенство

$$\log_6(k+3)+1>\log_6(k+4).$$

В самом деле,

$\log_6(k+3)+1=\log_6(6k+18)>\log_6(k+4)$,

поскольку $6k+18>k+4,\ 5k+14>0,$ что верно для любого $k\ge 2$. Индуктивный переход обоснован.

Ответ: $-2,-1,0,1$.

2. Использование области определения

● Найдите все целые числа x, удовлетворяющие неравенству

$$3^{\frac{5}{2}\log_3(13-4x)}-3^{\log_2(3x-2)}<47.\ \text{(МГУ, 1973)}$$

Решение. Допустимые значения x определяются системой неравенств

$$\begin{cases}13-4x>0\\3x-2>0\\x\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\dfrac{13}{4}\\x>\dfrac{2}{3}\\x\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{13}{4}\\x\in Z\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ x=1;2;3.$

Подставляем последовательно найденные значения x в неравенство, предварительно его упростив.

$$47+3^{\log_2(3x-2)}>(13-4x)^{\frac{5}{2}}.$$

1) $x=1$. Тогда $47+3^{\log_2 1}>9^{\frac{5}{2}}\ \Leftrightarrow\ 48>243$ (неверно).

2) $x=2$. Тогда $47+3^{\log_2 4}>5^{\frac{5}{2}}\ \Leftrightarrow\ 56>5^{\frac{5}{2}}\ \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ 56^2>5^5\ \Leftrightarrow\ 3136>3125$ (верно).

3) $x=3$. Тогда $47+3^{\log_2 7}>47+3^2=56>1^{\frac{5}{2}}\ \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ 56>1$ (верно).

Ответ: 2; 3.

3. Использование монотонности

● Найдите все целые z, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt[6]{z+1}<\sqrt[8]{6-z}.\ \text{(МГУ, 1976)}$$

Решение. Допустимые значения z определяются из системы

$$\begin{cases}z+1\ge 0\\6-z\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\ -1\le z\le 6.$$

Заметим, что левая часть неравенства увеличивается с ростом z, а правая – уменьшается. Это обстоятельство позволяет упростить перебор.

1) При $z=-1$ имеем $0<\sqrt[8]{7}$ (верно).

2) При $z=0$ имеем $1<\sqrt[8]{6}$ (верно).

3) При $z=1$ имеем $\sqrt[6]{2}<\sqrt[8]{5}\ \Leftrightarrow\ (\sqrt[6]{2})^{24}<(\sqrt[8]{5})^{24}$ $\Leftrightarrow\ 2^4=16<5^3=125$ (верно).

4) При $z=2$ имеем $\sqrt[6]{3}>\sqrt[8]{4}$, так как $3^4=81>4^3=64$.

В силу сделанного выше замечания, необходимости в проверке значений $z=3,4,5,6$ нет. Эти числа решениями не являются.

Ответ: $-1,0,1$.

4. Использование ограниченности

● Найдите все целочисленные решения неравенства

$$\sqrt{x^3-5x-3}\le 6-x.\ \text{(МГУ, 1996)}$$

Решение. Целые решения будем искать из двух ограничений системы

$$\begin{cases}x^3-5x-3\ge 0\\6-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x^2-5)\ge 3\\x\le 6\end{cases}$$

Первое неравенство выполняется при $x=3,4,5,6$. Но из этих значений исходному неравенству удовлетворяет только $x=3$.

При $x=0,1,2$ первое неравенство не выполняется.

При $x=-1$ выполняется как первое неравенство, так и исходное неравенство.

При $x=-2$ первое неравенство не выполняется.

При остальных значениях $x=-3,-4,...$ первое неравенство не разрешимо, так как левая часть неравенства $x(x^2-5)\ge 3$ будет отрицательной.

Ответ: -1; 3.

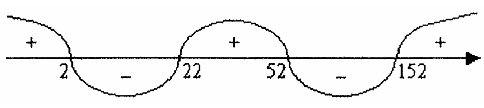
5. Метод интервалов

● Определите, сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$(n^2-2)(n^2-22)(n^2-52)(n^2-152)<0$$

(МГУ, 1972)

Решение. Методом интервалов по n^2 определяем решения $2<n^2<22$ или $52<n^2<152$.



Дальше подбором находим $n=\pm 2, \pm 3; \pm 4$ или $n=\pm 8, \pm 9; \pm 10; \pm 11; \pm 12$.
Ответ: 16 решений.

6. Функционально-графический метод

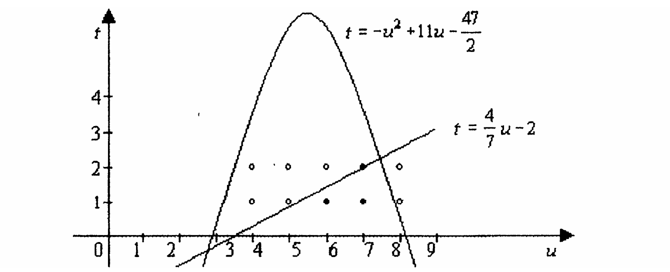
● Найдите все пары натуральных чисел $(t;u)$, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases} 2t+47<22u-2u^2 \\ 4u \ge 7t+14 \end{cases} \quad \text{(МГУ, 1997)}$$

Решение. Разрешим оба неравенства относительно t:

$$\begin{cases} t<-u^2+11u-\dfrac{47}{2} \\ t \le \dfrac{4}{7}u-2 \end{cases}$$

Для решения задачи необходимо найти все точки плоскости uOt, обе координаты которых натуральные числа, расположенные под прямой (и возможно на ней) $t=\dfrac{4}{7}u-2$ и под параболой $t<-u^2+11u-\dfrac{47}{2}$.



Если $u \le 5$, то $t \le \dfrac{4}{7}u-2 \le \dfrac{20}{7}-2=\dfrac{6}{7}<1$, т.е. нужных нам точек $(t;u)$, при $u \le 5$ нет.
Если $u=8$, то из первого неравенства системы получаем, что $t<-64+11\cdot 8-\dfrac{47}{2}=\dfrac{1}{2}$.
Если же $u \ge 9$, то первое неравенство дает $t<0$, поэтому точек $(t;u)$, при $u \ge 9$ тоже нет.
Если $u=6$, то система принимает вид

$$\begin{cases} t<-36+66-\dfrac{47}{2}=6\dfrac{1}{2} \\ t \le \dfrac{4}{7}\cdot 6-2=1\dfrac{3}{7} \end{cases}$$

Значит, $t=1$.
Если $u=7$, то система принимает вид

$$\begin{cases} t<-49+77-\dfrac{47}{2}=4\dfrac{1}{2} \\ t \le \dfrac{4}{7}\cdot 7-2=2, \end{cases}$$

т.е. $t=1$ или $t=2$.
Ответ: $(1;6);(1;7);(2;7)$.

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. Уравнение с одной неизвестной

1.1. Найдите все такие целые a и b, для которых один из корней уравнения

$$3x^3+ax^2+bx+12=0$$

равен $1+\sqrt{3}$.
Ответ: $a=-12, b=6$.

1.2. Найдите рациональные p и q, если один из корней уравнения $x^2+px+q=0$ равен $1+\sqrt{3}$.
Ответ: $p=q=-2$.

1.3. Может ли квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ с целыми коэффициентами иметь дискриминант, равный 23?
Ответ: не может.

1.4. (2010) Каждый из двух различных корней квадратного трехчлена $f(x)=x^2+(3a+10)x+5b-14$ и его значение при $x=1$ являются простыми числами. Найдите a, b и корни трехчлена $f(x)$.
Ответ: $a=-5, b=4, \ x_1=2, \ x_2=3$.

1.5. (2010) Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трехчлена и его значение в точке $x=11$ являются простыми числами. Найдите корни трехчлена.
Ответ: 12; 13.

1.6. (2010) Найдите все такие целые a и b, что корни уравнения $x^2+(2a+9)x+3b+5=0$ являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a+9$ и $3b+5$ - простыми числами.
Ответ: $a=-3; b=-1$.

2. Уравнения первой степени с двумя неизвестными

2.1. Решите уравнение $3x-4y=1$ в целых числах.
Ответ: $x=4n+3, \ \ y=3n+2, \ \ n \in Z$.

2.2. (2010) Найдите все целые решения уравнения $113x + 179y = 17$, удовлетворяющие неравенствам $x > 0,\ y + 100 > 0$.
Ответ: $x = 35;\ y = -22$.

3. Уравнения второй степени с двумя неизвестными

3.1. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2 - 14x + 4y^2 + 32y + 88 = 0$. (МГУ, 2007)
Ответ: $(12;-4)$; $(2;-4)$; $(10;-2)$; $(4;-2)$; $(10;-6)$; $(4;-6)$.

3.2. Решите уравнение $xy - y^2 = x$ в целых числах.
Ответ: $(0;0)$; $(4;2)$.

3.3. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению
$-3xy - 10x + 13y + 35 = 0$. (МФТИ, 2004)
Ответ: $(6;-5)$; $(4;5)$; $(-4;-3)$.

3.4. Решите в целых числах уравнение
$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$.
Ответ: $(1;-1)$.

3.5. Решите уравнение $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$ в целых числах.
Ответ: $(10;0)$; $(-10;0)$; $(1;3)$; $(17;3)$; $(18;4)$; $(6;4)$; $(-1;-3)$; $(-17;-3)$; $(-6;-4)$; $(15;5)$; $(-15;-5)$.

3.6. Уравнение $2xy = x^2 + 2y$ решите в натуральных числах.
Ответ: $x = y = 2$.

3.7. Найдите все пары целых чисел, сумма которых равна их произведению.
Ответ: $x = 0,\ y = 0;\ x = 2,\ y = 2$.

3.8. Решите уравнение $xy + x - y = 2$ в целых числах.
Ответ: $x = 2,\ y = 0;\ x = 0,\ y = -2$.

3.9. Решите в целых числах уравнение
$x + y = x^2 - xy + y^2$. (ММО, 1941, 9-10 классы)
Ответ: $(0;0);(1;0);(0;1);(2;1);(1;2);(2;2)$.

3.10. Решите в натуральных числах систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + yz = 19 \end{cases}$$
Ответ: $(5;2;7);(5;7;2);(7;3;4);(7;4;3)$.

3.11. Найдите все целые решения уравнения:
$x^2 - 2xy + 2x - y + 1 = 0$. (Московская математическая регата, 2005/2006, 11 класс)
Ответ: $x = 0;\ y = 1$ или $x = -1;\ y = 0$.

3.12. (2010) Решите в целых числах уравнение
$2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$.
Ответ: $(1;9),(2;8),(0;2),(-1;3)$.

3.13. (2010) Найдите все целые решения уравнения $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$.
Ответ: $x = 2;\ y = 1$ или $x = -2;\ y = -1$.

3.14. При каких натуральных числах a существуют такие натуральные числа x и y, что
$x^2 + y^2 = axy$? (ММО, 1964, 7 класс)
Ответ: $a = 2$.

3.15. Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $x^2 = y^2 + 2y + 13$. (ММО, 1983, 7 класс)
Ответ: $(4;1);(4;-3);(-4;1);(-4;-3)$.

3.16. Решите в целых положительных числах уравнение $2x^2 - xy - y^2 + 2x + 7y = 84$.
Ответ: $(13;20)$; $(6;0)$.

4. Уравнения высшей степени

4.1. Уравнение $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$ решите в целых числах.
***Ответ*:** $x = y = z = 0$.

4.2. Решите в целых числах уравнение
$4x^3 - 2y^3 - z^3 = 0$.
Ответ: $(0;0;0)$.

4.3. Решите уравнение $3x^2 + 4xy - 7y^2 - 13 = 0$ в целых числах.
Ответ: $(2;1)$; $(-2;-1)$.

4.4. Решите уравнение
$2x^2y^2 + y^2 - 6x^2 - 12 = 0$ в целых числах.
Ответ: $(-2;2)$; $(-2;2)$; $(2;-2)$; $(2;2)$.

4.5. Уравнение $x^3 + 91 = y^3$ решите в целых числах.
Ответ: $(5;6),(-6;-5),(-3;4),(-4;3)$.

4.6. Какие целые положительные числа могут удовлетворять уравнению $x + y + z = xyz$?
Ответ: $(1;2;3),(1;3;2),\ (2;1;3),(2;3;1),(3;1;2),(3;2;1)$.

4.7. Решите в целых числах уравнение
$19x^3 - 84y^2 = 1984$.
Ответ: нет решений.

4.8. (2010) Найдите все решения в натуральных числах $x(y+1)^2 = 243y$.
Ответ: $x = 24;\ y = 8$ или $x = 54;\ y = 2$.

4.9. (2010) Решите в целых числах уравнение
$m \cdot n^2 = 10^5 n + m$.

Ответ: $m=-11250;\ n=-9$ или $m=-37500;\ n=-3$ или $m=0;\ n=0$ или $m=37500;\ n=3$ или $m=11250;\ n=9$.

4.10. (2010) Найдите все натуральные числа x и y, для которых выполняется равенство
$x^4+x^3+x^2+x+1=y^2$.

Ответ: $x=3;\ y=11$.

4.11. (2010) Решите в целых числах уравнение
$m^4-2n^2=1$. (ММО, 2002, 9 класс)

Ответ: $m=\pm1;\ n=0$.

4.12. (2010) Существуют ли рациональные числа $x,\ \ y,\ \ u,\ \ v,$ которые удовлетворяют уравнению $\left(x+y\sqrt{2}\right)^6+\left(u+v\sqrt{2}\right)^6=7+5\sqrt{2}$?

Ответ: таких чисел нет.

4.13. Существуют ли рациональные числа $a,$ $b,\ \ c,\ \ d,$ которые удовлетворяют уравнению $\left(a+b\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(c+d\sqrt{2}\right)^{2n}=5+4\sqrt{2}$ (где n – натуральное число)? (ММО, 1972, 9 класс)

Ответ: таких чисел нет.

4.14. (2010) Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n, при которых уравнение
$(x^2+y^2)^{2010}=x^n y^n$
имеет натуральные решения.

***Ответ*:** 2011; 3015.

4.15. (2010) Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n, при которых уравнение
$$\frac{2012\ln(x^2+y^2)}{n}=\ln(xy)$$
имеет натуральные решения.

Ответ: 2013; 3018.

4.16. Решите в целых положительных числах уравнение $x^{2y}+(x+1)^{2y}=(x+2)^{2y}$. (ММО, 1958, 10 класс)

Ответ: $x=3;\ y=1$.

4.17. Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству
$9x^2y^2+6xy^2-9x^2y+2x^2+y^2-18xy+7x-5y+6=0$.
(МГУ, 1989)

Ответ: $(0;-2),(-2;0),(0;3),(2;1)$.

4.18. Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству
$15x^2y^2-8yx^2+28y^2x+x^2+5y^2-$
$-38xy+8x-24y+16=0$. (МГУ, 1989)

Ответ: $(-2;2),(-4;0),(0;4)$.

4.19. Найдите все тройки целых чисел $(x;y;z)$, для каждой из которых выполняется соотношение $3(x-3)^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2=33$. (МГУ, 1979)

Ответ: $(6;1;0),(6;-1;0),(0;1;0),(0;-1;0)$.

4.20. Найдите все тройки целых чисел $(x;y;z)$, для каждой из которых выполняется соотношение $5x^2+y^2+3z^2-2yz=30$. (МГУ, 1979)

Ответ: $(1;5;0),(1;-5;0),(-1;5;0),(-1;-5;0)$.

5. Дробно-рациональные уравнения

5.1. Решите в натуральных числах уравнение
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Ответ: $(3;3;3)$; $(2;4;4)$; $(4;2;4)$; $(4;4;2)$; $(2;3;6)$; $(2;6;3)$; $(3;2;6)$; $(3;6;2)$; $(6;2;3)$; $(6;3;2)$.

5.2. Решите в натуральных числах уравнение
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $(4;4)$; $(6;3)$; $(3;6)$.

5.3. (2010) Найдите все пары натуральных чисел разной четности, удовлетворяющие уравнению
$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{12}.$$

Ответ: $(13;156)$; $(15;60)$; $(21;28)$, $(156;13)$; $(60;15)$; $(28;21)$.

5.4. (2010) Решите в натуральных числах уравнение
$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{25},$$
где $m>n$.

Ответ: $m=150;\ n=30$ или $m=650;\ n=26$.

6. Иррациональные уравнения

6.1. Найдите все целые решения уравнения
$\sqrt{x+\sqrt{x}}=y-2002$. (Московская математическая регата, 2002/2003, 11 класс)

Ответ: $x=0;\ y=2002$.

6.2. Решите в целых числах уравнение
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{98}$.

Ответ: $(0;98)$; $(2;72)$; $(8;50)$; $(18;32)$; $(32;18)$; $(50;8)$; $(72;2)$; $(98;0)$.

7. Показательные уравнения

7.1. (2010) Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

Ответ: $m = 2$, $n = 1$.

7.2. (2010) Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

Ответ: $m = 3$, $n = 2$ или $m = n = 1$.

7.3. (2010) Решите в натуральных числах уравнение $2^x - 15 = y^2$.

Ответ: $(4;1);(6;7)$.

7.4. Решите в целых числах уравнение $2^x - 1 = y^2$.

Ответ: $(1;1);(1;-1);(0;0)$.

7.5. (2010) Решите в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$.

Ответ: $n = 0;\ x = 3$ или $n = 0;\ x = -3$.

7.6. (2010) Решите в целых числах уравнение $1 + 2^k + 2^{2k+1} = n^2$.

Ответ: $k = 0;\ n = \pm 2$ или $k = 4;\ n = \pm 23$.

7.7. (2010) Решите уравнение $3^m + 4^n = 5^k$ в натуральных числах. (ММО, 1998, 11 класс)

Ответ: $m = n = k = 2$.

8. Уравнения смешанного типа

8.1. (2010) Найдите все пары натуральных k и n таких, что $k < n$ и $\left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{k}\right)^n$.

Ответ: $k = 2$, $n = 4$.

8.2. Найдите все целые корни уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1$. (МГУ, 1979)

Ответ: $x_1 = -31$, $x_2 = -7$.

8.3. Найдите все целые корни уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{10}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 80x - 40}\right)\right) = 1$. (МГУ, 1979)

Ответ: -13, -59.

9. Уравнения, содержащие знак факториала

9.1. (2010) Решите в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ - произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

Ответ: $n = 2;\ k = 5$.

9.2. Уравнение $x! + y! = (x + y)!$ решите в целых числах.

Ответ: $x = 1$, $y = 1$.

9.3. Найдите все натуральные значения n, для которых выполняется равенство: $n^3 - n = n!$. (Московская математическая регата, 2003/2004, 11 класс)

Ответ: $n = 5$.

10. Уравнения с простыми числами

10.1. Уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ решите в простых числах.

Ответ: $x = 3$, $y = 2$.

10.2. Решите в простых числах уравнение $x^y + 1 = z$.

Ответ: $x = 2$, $y = 2$, $z = 5$.

11. Неразрешимость уравнений

11.1. Докажите, что уравнение $x! + y! = 10z + 9$ не имеет решений в натуральных числах.

11.2. Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ не имеет решений в целых числах. (ВМО, 1992, 9 класс)

11.3. Докажите, что выражение $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$ не равно 33 ни при каких целых значениях x и y. (ММО, 1946, 8-9 классы)

11.4. Доказать, что равенство $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ для целых чисел x, y, z возможно только при $x = y = z = 0$. (ММО, 1949, 7-8 классы)

11.5. Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2 + 2010 = n^2$?

11.6. Докажите, что уравнение $x^2 + 1 = 3y$ не имеет решений в целых числах.

12. Текстовые задачи

12.1. (2010) Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа A за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа B за несколько рейсов, причём в этом случае число рейсов каждого автобуса типа B будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа A. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа B входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа A?

Ответ: 1980 детей перевозятся тремя автобусами типа B (по 15 человек) за 44 рейса или двумя автобусами типа A (по 22 человека) за 45 рейсов.

12.2. (2010, 10 класс) Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 шарика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

Ответ: 840.

12.3. (2010, 10 класс) Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 2 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 5 шариков меньше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 3 пакетика, а коробок потребуется на 2 меньше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

Ответ: 2112.

12.4. Целые числа x, y и z образуют геометрическую прогрессию, а числа $5x+3$, y^2 и $3z+5$ - арифметическую прогрессию (в указанном порядке). Найдите x, y и z. (МГУ, 2008)

Ответ: $(2;6;18)$, $(2;-6;18)$.

12.5. (2010, 10 класс) Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 1000 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

Ответ: 2500.

12.6. (2010, 10 класс) Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

Ответ: 1369.

12.7. (2010) Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1=5, a_2=8,..., a_N$ и $b_1=9, b_2=14,..., b_M$ совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Ответ: 49 и 29.

12.8. (2010) Найдите все пары пятизначных чисел x, y, такие, что число $\overline{xy}$, полученное приписыванием десятичной записи числа y после десятичной записи числа x, делится на xy.

Ответ: $x=16667$; $y=33334$.

13. Уравнения, содержащие функцию «целая часть числа» $[x]$

● <u>Целой частью числа</u> x называется наибольшее целое число, не превосходящее x.

● <u>Свойства</u> целой части числа:

1) Из равенства $[y]=n$ следует, что
   а) n – целое число;
   б) $y=n+\alpha$, где $0\le\alpha<1$;
   в) $0\le y-n<1$.
2) Если $[u]=[v]$, то $u=m+\alpha$, $v=m+\beta$, где $0\le\alpha<1$ и $0\le\beta<1$, поэтому $u-v=\alpha-\beta$ и $-1<u-v<1$.
3) Если $[x+y]=x$, то x – целое число и $0\le y<1$.
4) Если n – целое число, то $[n+x]=n+[x]$.

13.1. Решите уравнение $\left[\dfrac{8x+19}{7}\right]=\dfrac{16(x+1)}{11}$.

Ответ: $1\frac{1}{16}$; $1\frac{3}{4}$; $2\frac{7}{16}$; $3\frac{1}{8}$; $3\frac{13}{16}$.

13.2. Решите уравнение $\left[\dfrac{5+6x}{8}\right]=\dfrac{15x-7}{5}$.

Ответ: $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{15}$.

13.3. Решите уравнение $x+[10x]=10x$. (МГУ, 1996)

Ответ: $x_n=\frac{n}{9}$, $n=0,1,....,8$.

13.4. Решите уравнение $x^3-[x]=3$. (ММО, 1957, 9 класс)

Ответ: $\sqrt[3]{4}$.

13.5. (2010) Найдите все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению $2008\left[n\sqrt{1004^2+1}\right]=n\left[2008\sqrt{1004^2+1}\right]$, где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x.

Ответ: $n=1, 2, 3, ..., 2008$.

14. Неравенства

14.1. (2010) Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+y^2<18x-20y-166 \\ 32x-y^2>x^2+12y+271 \end{cases}$$

Ответ: $(12; -8)$.

14.2. (2010) Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+24x-28y+167<0 \\ x+2y<\dfrac{15}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(-7; 7)$, $(-6; 6)$.

14.3. Найдите все целые решения неравенства $x-1<\log_6(x+3)$. (МГУ, 1972)

Ответ: $-2; -1; 0; 1$

14.4. Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство $|x|+|y|<100$? (ММО, 1948, 9-10 классы)

Ответ: 19801.

14.5. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x-y\le -25 \\ x^2-y\le 8 \\ 4x+y\le 1 \end{cases} \quad \text{(МГУ, 2007)}$$

Ответ: $(-5; 20)$, $(-5; 21)$.

14.6. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} |x^2-2x|<y+1 \\ y+|x-1|<2 \end{cases} \quad \text{(МГУ, 2006)}$$

Ответ: $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(1; 1)$.

15. Задачи с параметрами

15.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x и y, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} -15x^2+11xy-2y^2=7 \\ x<y \\ 2a^2x+3ay<0 \end{cases} \quad \text{(МГУ, 1985)}$$

Ответ: $-\dfrac{13}{3}<a\le -\dfrac{19}{5}$.

15.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x и y, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} 3x^2+11xy+10y^2=7 \\ x+y>0 \\ 4a^2x-3ay<0 \end{cases} \quad \text{(МГУ, 1985)}$$

Ответ: $-\dfrac{5}{11}<a\le -\dfrac{1}{3}$.

15.3. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2+5(x+1)+3|x-p|+p\le 0$ максимально. (МГУ, 1992)

Ответ: $\{-5\}\cup[-3{,}5; -3{,}25]$.

15.4. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2+3x+3|x+b|-b\le 0$ максимально. (МГУ, 1992)

Ответ: $\{4\}\cup[2{,}25; 2{,}5]$.

15.5. Найдите все значения параметра q, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2-5(x-1)+3|x-q|-q\le 0$ максимально. (МГУ, 1992)

Ответ: $[3{,}25; 3{,}5]\cup\{5\}$.

15.6. (2010, 10 класс) Найдите все значения параметра, при каждом из которых среди значений функции $y=\dfrac{x^2-2x+a}{6+x^2}$ есть ровно одно целое число.

Ответ: $1<a<11$.

15.7. (2010, 10 класс) Найдите все значения параметра, при каждом из которых среди значений функции $y=\dfrac{x^2+2x-a}{6+x^2}$ есть ровно одно целое число.

Ответ: $-11<a<-1$.

15.8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $6x^2+4a^2+6ax-3x-24a+35<0$ содержит хотя бы одно целое решение. (МГУ, 2007)

Ответ: (2; 7).

15.9. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно пять различных наборов натуральных чисел $(x; y; z)$ удовлетворяет системе условий

$$\begin{cases} 12x^2-4x-2xy+3y-9=0 \\ a\cdot yz+a\cdot xz+a\cdot xy>xyz. \end{cases} \quad \text{(МГУ, 1999)}$$

Ответ: $\left(\dfrac{5}{11}; \dfrac{6}{13}\right]$.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1. Уравнение с одной неизвестной

1.1. Найдите все такие целые a и b, для которых один из корней уравнения

$$3x^3+ax^2+bx+12=0$$

равен $1+\sqrt{3}$.

Решение. Подставим в уравнение $x=1+\sqrt{3}$. Получим равенство

$(4a+b+42)+(2a+b+18)\sqrt{3}=0.$ Равенство $A+B\sqrt{3}=0$, где A и B – целые, выполняется, если $B=0.$

Действительно, если $B\neq 0,$ то $\sqrt{3}=-\dfrac{A}{B},$ т.е. иррациональное число $\sqrt{3}$ оказалось равно рациональному, что невозможно. Таким образом, $B=0,$ а следовательно, и $A=0.$ Решая систему

$$\begin{cases}4a+b+42=0\\ 2a+b+18=0,\end{cases}$$

находим $a=-12,\ b=6.$

Ответ: $a=-12,\ b=6.$

1.3. Может ли квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ с целыми коэффициентами иметь дискриминант, равный 23?

Первое решение. Рассмотрим уравнение $b^2-4ac=23.$ Так как 23 – нечетное число, а $4ac$ - четное, то b^2 и, следовательно, b – нечетное число, т.е. $b=2k-1,\quad k\in Z.$ Тогда $(2k-1)^2-4ac=23;\ 4(k^2-k-ac)=22.$ Последнее уравнение не имеет решений, так как 22 не делится на 4.

Второе решение. Перепишем уравнение $b^2-4ac=23$ в виде $b^2-25=4ac-2$ и разложим обе части уравнения на множители:

$(b-5)(b+5)=2(2ac-1).$ (*)

Так как в правой части уравнения – число четное, то и в левой – тоже четное, следовательно, $b-5$ и $b+5$ одновременно четные (докажите), т.е. $b-5=2m,\ \ b-5=2k.$ Левая часть уравнения (*) делится на 4, а правая – нет, поэтому уравнение $b^2-4ac=23$ не имеет решений в целых числах.

Третье решение. Перепишем уравнение $b^2-4ac=23$ в виде $b^2=4ac+23$ или $b^2=4(ac+5)+3.$ Получили, что квадрат натурального числа при делении на 4 дает остаток 3, что невозможно (докажите).

***Ответ*:** не может.

1.4. (2010) Каждый из двух различных корней квадратного трехчлена

$f(x)=x^2+(3a+10)x+5b-14$ и его значение при $x=1$ являются простыми числами. Найдите $a,\ b$ и корни трехчлена $f(x).$

Решение. Обозначим $3a+10=p,\ 5b-14=q.$ Тогда значение трехчлена при $x=1$ есть $f(1)=1+p+q.$ Пусть x_1 и x_2 - корни трехчлена, $x_1<x_2.$ Воспользовавшись формулами Виета $x_1\cdot x_2=q,\ \ x_1+x_2=-p,$ запишем выражение $f(1)$ в виде $f(1)=1-(x_1+x_2)+x_1x_2$ и преобразуем его, разложив правую часть на множители: $f(1)=1-x_1+x_2(x_1-1)=(x_1-1)(x_2-1).$

Так как $f(1)$, x_1 и x_2 по условию являются простыми числами, то числа x_1-1 и x_2-1 - натуральные и меньшее из них должно быть равно 1. Следовательно, $x_1-1=1,$ откуда $x_1=2.$ Тогда $f(1)=x_2-1,$ т.е. x_2-1 и x_2 - два последовательных простых числа, что возможно только если этими числами являются 2 и 3. Итак, $x_2=3,$ поэтому $p=3a+10=-5,\ \ q=5b-14=6.$ Из двух последних равенств находим $a=-5,\ b=4.$

***Ответ*:** $a=-5,\ b=4,\ \ x_1=2,\ \ x_2=3.$

1.6. (2010) Найдите все такие целые a и b, что корни уравнения $x^2+(2a+9)x+3b+5=0$ являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a+9$ и $3b+5$ - простыми числами.

Решение. Обозначим корни квадратного уравнения через m и n. По теореме Виета $mn=3b+5$ - простое число, тогда $m=\pm 1,$ $n=\pm(3b+5).$ Тогда $2a+9=\mp(3b+6)=\mp 3(b+2).$ Поэтому простое число $2a+9=3,$ откуда $a=-3.$ Тогда $b+2=1,$ т.е. $b=-1.$

Ответ: $a=-3;b=-1.$

2. Уравнения первой степени с двумя неизвестными

2.2. (2010) Найдите все целые решения уравнения $113x+179y=17,$ удовлетворяющие неравенствам $x>0,\ y+100>0.$

Решение. Воспользуемся методом, сходным с алгоритмом Евклида. Имеем $179=113+66.$ Перепишем уравнение в виде $113(x+y)+66y=17.$ Обозначим $x+y=u,$

$113u+66y=17.$ Можно вновь 113 разделить на 66 с остатком, а лучше так: $113=2\cdot 66-19.$ Получаем $66(2u+y)-19u=17.$ Обозначим
$2u+y=\upsilon,\ \ 66\upsilon-19u=17,$
$66=3\cdot 19+9.$ Получаем уравнение
$19(3\upsilon-u)+9\upsilon=17,\ \ 3\upsilon-u=\omega;\ \ 19\omega+9\upsilon=17,$
$9(2\omega+\upsilon)+\omega=17,\ \ 2\omega+\upsilon=t.$
Наконец, получаем уравнение $9t+\omega=17.$ Это уравнение имеет решение: $\omega=17-9t,$ где t – любое целое число. Проделываем обратные действия: $\upsilon=t-2\omega=t-34+18t=19t-34,$
$u=3\upsilon-\omega=66t-119,\quad y=\upsilon-2u=-113t+204,$
$x=u-y=179t-323.$ Таким образом,
$x=179t-323,\ \ y=-113t+204,$ где t – любое целое число. Из условия $x>0,\ y>-100$, т.е. из системы $\begin{cases}179t-323>0\\ -113t+204>-100\end{cases}$ найдем $t=2,$
затем $x=35;\ y=-22.$
Ответ: $x=35;\ y=-22.$

3. Уравнения второй степени с двумя неизвестными

3.1. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2-14x+4y^2+32y+88=0.$ (МГУ, 2007)
Указание. Уравнение приводится к виду
$(x-7)^2+4(y+4)^2=25.$
Ответ: $(12;-4);\ (2;-4);\ (10;-2);\ (4;-2);$
$(10;-6);\ (4;-6).$
3.7. Найдите все пары целых чисел, сумма которых равна их произведению.
Первое решение. Пусть целые числа x и y таковы, что $x+y=xy,$ тогда отсюда получим
$$y=\frac{x}{x-1}.$$
Поскольку x и $x-1$ два последовательных целых числа, то число y может быть целым только тогда, когда $x-1=\pm 1,$ т.е. $x=0$ или $x=2.$
Тогда получаем $y=0$ или $y=2$ соответственно.
Второе решение. Приведем уравнение $x+y=xy$ к виду $x(y-1)-y+1=1$ или
$(x-1)(y-1)=1.$ Отсюда получаем две системы.
1) $\begin{cases}x-1=1\\ y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$
2) $\begin{cases}x-1=-1\\ y-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$
***Ответ*:** $x=0,\ y=0;\ \ x=2,\ y=2.$

3.8. Решите уравнение $xy+x-y=2$ в целых числах.
Указание. $(x-1)(y+1)=1.$
Ответ: $x=2,\ y=0;\ \ x=0,\ y=-2.$
3.9. Решите в целых числах уравнение
$x+y=x^2-xy+y^2.$ (ММО, 1941, 9-10 классы)
Указание. Преобразуйте уравнение к виду
$(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2=2.$
Ответ: $(0;0);(1;0);(0;1);(2;1);(1;2);(2;2).$
3.10. Решите в натуральных числах систему уравнений
$$\begin{cases}x+y+z=14\\ x+yz=19\end{cases}$$
Решение. Вычитая из второго уравнения системы первое, получим:
$yz-y-z=5,$ или $yz-y-z+1=6,$
$(y-1)(z-1)=6.$ Будем искать лишь решения, удовлетворяющие условию $y<z$ (остальные решения получаются перестановкой значений y и z). При таком соглашении последнее уравнение сводится к одной из следующих двух систем:
$$\begin{cases}y-1=1\\ z-1=6\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}y-1=2\\ z-1=3.\end{cases}$$
Из первой системы $y=2,\ z=7,$ а из второй $y=3,\ z=4.$ Подставляя эти значения y и z в одно из уравнений заданной системы, получим соответствующие им значения $x=5$ или $x=7$.
***Ответ*:** $(5;2;7);(5;7;2);(7;3;4);(7;4;3).$
3.11. Найдите все целые решения уравнения:
$x^2-2xy+2x-y+1=0.$ (Московская математическая регата, 2005/2006, 11 класс)
Первое решение. Преобразуем данное уравнение, выразив переменную y через переменную x: $y(2x+1)=x^2+2x+1;\quad y=\dfrac{x^2}{2x+1}+1,$ так как $2x+1\neq 0$ при любых целых значениях x. Для того, чтобы y было целым, необходимо и достаточно, чтобы дробь $\dfrac{x^2}{2x+1}$ принимала целые значения.
Заметим, что НОД$(2x+1;x)=$ НОД$(x+1;x)=1,$ поэтому числа x^2 и $2x+1$- взаимно простые.
Следовательно, выражение $\dfrac{x^2}{2x+1}$ принимает целые значения, если $2x+1=\pm 1.$ Таким образом, решения данного уравнения: $x=0;\ y=1$ и $x=-1;\ y=0.$

Второе решение. Запишем данное уравнение как квадратное относительно переменной x: $x^2-2(y-1)x-(y-1)=0$. Его решения: $x=(y-1)\pm\sqrt{D'}$, где $D'=(y-1)^2+(y-1)=(y-1)y$.

Для того, чтобы x было целым, необходимо и достаточно, чтобы D' являлось квадратом целого числа. Это возможно только, если $D'=0$ $\Leftrightarrow$ $y=1$ или $y=0$, так как в остальных случаях число $(y-1)y$ находится в интервале между двумя соседними квадратами: $(y-1)^2$ и y^2. Если $y=1$, то $x=0$; если $y=0$, то $x=-1$.

Третье решение. Преобразуем данное уравнение, выделив квадрат трехчлена:

$(x^2+y^2+1-2xy+2x-2y)-y^2+y=0 \Leftrightarrow$ $(x-y+1)^2=(y-1)y$. По доказанному выше $(y-1)y$ является квадратом целого числа тогда, и только тогда, когда $y=0$ или $y=1$. Если $y=1$, то $x=0$; если $y=0$, то $x=-1$.

Ответ: $x=0$; $y=1$ или $x=-1$; $y=0$.

3.12. (2010) Решите в целых числах уравнение $2x^2-2xy+9x+y=2$.

Решение. Преобразуем уравнение: $y(2x-1)=2x^2+9x-2$. Так как x – целое, то $2x-1\neq 0$, поэтому выразим y через x:

$$y=\frac{2x^2+9x-2}{2x-1}=x+5+\frac{3}{2x-1}.$$

Поскольку x и y – целые числа, то число $\dfrac{3}{2x-1}$ - тоже целое. Значит, $2x-1$ делитель 3, т.е.

1) $2x-1=1,\ x=1;$
2) $2x-1=-1,\ x=0;$
3) $2x-1=3,\ x=2;$
4) $2x-1=-3,\ x=-1.$

Ответ: $(1;9),(2;8),(0;2),(-1;3)$.

3.13. (2010) Найдите все целые решения уравнения $3x^2+4xy-7y^2=13$.

Решение. Разложим левую часть на множители: $3x^2+4xy-7y^2=(x-y)(3x+7y)$.

Имеем $(x-y)(3x+7y)=13.$ Поскольку 13 можно представить в виде произведения двух целых чисел с учетом порядка четырьмя способами, то получаем четыре системы:

1) $\begin{cases}x-y=1\\3x+7y=13\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=13\\3x+7y=1\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x-y=-1\\3x+7y=-13\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-y=-13\\3x+7y=-1\end{cases}$

Целочисленные решения имеют лишь 1-я и 3-я системы.

Ответ: $x=2$; $y=1$ или $x=-2$; $y=-1$.

3.14. При каких натуральных числах a существуют такие натуральные числа x и y, что $x^2+y^2=axy$? (ММО, 1964, 7 класс)

Указание. Положим $t=\dfrac{y}{x}$, тогда t – рациональное число, являющееся корнем уравнения $t^2-at+1=0$. Но тогда $t=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$. Число $\sqrt{a^2-4}$ при целом a может быть рациональным только при $a=\pm 2$.

Ответ: $a=2$.

3.15. Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $x^2=y^2+2y+13$. (ММО, 1983, 7 класс)

Указание. Представим уравнение в виде $x^2=(y+1)^2+12$ или $x^2-(y+1)^2=12$, $(x-y-1)(x+y+1)=12$. Заметив, что каждая скобка – четное число, получаем 4 возможности, оттуда следует ответ.

Ответ: $(4;1);\ (4;-3);(-4;1);(-4;-3)$.

3.16. Решите в целых положительных числах уравнение $2x^2-xy-y^2+2x+7y=84$.

Решение. Рассматривая данное уравнение как квадратное $y^2+y(x-7)+84-2x-2x^2=0$ относительно y, найдем дискриминант $D=9x^2-6x-287=(3x-1)^2-288$, который должен быть точным квадратом, т.е. $(3x-1)^2-288=u^2$. Отсюда следует, что $u<3x-1$. Положим, $u=(3x-1)-k$, где k – натуральное число. Тогда получаем: $(3x-1)^2-288=((3x-1)-k)^2$, или $2k(3x-1)=k^2+288$, откуда видно, что k – число четное. Пусть $k=2l$, где l – натуральное число. Тогда находим: $l(3x-1)=l^2+72$, или

$$3x=l+\frac{72}{l}+1.\ (*)$$

Отсюда видно, что число $\dfrac{72}{l}$ должно быть натуральным, т.е. l должно быть делителем числа 72. Возможные значения для l: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Из них надо взять лишь такие, для которых число $l+\dfrac{72}{l}+1$ кратно 3. Этому условию удовлетворяют лишь числа $l_1=2,$ $l_2=8,$ $l_3=9,$ $l_4=36.$ Затем из (*) находим для x два значения: 13 и 6. Из исходного уравнения найдем соответствующие (только натуральные) значения y.

Ответ: $(13;20);\ (6;0).$

4. Уравнения высшей степени

4.5. Уравнение $x^3+91=y^3$ решите в целых числах.

Решение. Данное уравнение перепишем в виде $(y-x)(y^2+xy+x^2)=13\cdot 7.$ Поскольку

$$y^2+xy+x^2=\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3x^2}{4}\geq 0,$$ то возможны только следующие четыре случая:

1) $\begin{cases} y-x=1 \\ y^2+xy+x^2=91 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-6 \\ y=-5 \end{cases} \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} y-x=7 \\ y^2+xy+x^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$

3) $\begin{cases} y-x=13 \\ y^2+xy+x^2=7 \end{cases}$ Нет решений.

4) $\begin{cases} y-x=91 \\ y^2+xy+x^2=1 \end{cases}$ Нет решений.

Ответ: $(5;6),(-6;-5),(-3;4),(-4;3).$

4.6. Какие целые положительные числа могут удовлетворять уравнению $x+y+z=xyz$?

Решение. Для определенности пусть $x\leq y\leq z.$ Из данного уравнения получаем $3z\geq xyz.$ Рассмотрим случай равенства $3z=xyz,$ $xy=3,$ откуда

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=3 \\ y=1. \end{cases}$ При этих значениях x и y получаем из данного уравнения $z=2.$ Все эти значения не соответствуют нашему условию $x\leq y\leq z.$

Теперь пусть $3z>xyz,$ $xy<3.$ Поскольку $0<x\leq y,$ возможны только следующие варианты: $x=1,$ $y=1$ или $x=1,$ $y=2.$ Для первого варианта получаем из данного уравнения $z=0,$ что не соответствует условию задачи. Для второго варианта $z=3.$ Таким образом, при условии $x<y<z$ исходное уравнение имеет одно решение $x=1,$ $y=2,$ $z=3.$ Все остальные решения получаются из этого перестановками значений неизвестных $x,$ $y,$ $z.$

Ответ: $(1;2;3),(1;3;2),\ (2;1;3),(2;3;1),$ $(3;1;2),(3;2;1).$

4.7. Решите в целых числах уравнение $19x^3-84y^2=1984.$

Указание. Перепишите уравнение в виде $19(x^3-100)=84(1+y^2).$ Правая часть кратна 7, поэтому x^3-2 кратно 7. Но кубы чисел при делении на 7 не дают в остатке 2.

Ответ: нет решений.

4.8. (2010) Найдите все решения в натуральных числах $x(y+1)^2=243y$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде (учитывая, что $x\neq 0;\ y\neq 0$)

$$x=\frac{243y}{(y+1)^2}.$$

Для того чтобы x было целым числом, знаменатель $(y+1)^2$ должен быть одним из делителей числа 243, потому что y не может иметь общие множители с $y+1$. Поскольку $243=3^5$, то 243 делится только на следующие числа, являющиеся точными квадратами: 1^2, 3^2, 9^2. Таким образом, число $(y+1)^2$ должно быть равно 1, 9 или 81, откуда находим, что y равно 8 или 2. Значит,

$$x=\frac{243\cdot 8}{81}=24 \quad\text{или}\quad x=\frac{243\cdot 2}{9}=54.$$

Ответ: $x=24;\ y=8$ или $x=54;\ y=2$.

4.9. (2010) Решите в целых числах уравнение $m\cdot n^2=10^5n+m.$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$m(n^2-1)=10^5n.$ (1)

Если $n=0,$ то $m=0.$ Первое решение уравнения (1) найдено.

Если $n\neq 0,$ то и $m\neq 0.$ Заметим, что если пара чисел $(m_0;n_0)$ решение уравнения (1), то и пара $(-m_0;-n_0)$ - тоже решение уравнения (1).

Пусть $n>0$ и $m>0,$ тогда $n\neq 1.$ Перепишем уравнение (1) в виде

$m(n-1)(n+1)=10^5n.$ (2)

Так как ни $n-1$, ни $n+1$ не делятся на n, то m делится на n. Обозначим $m=np$.
Разделив равенство (2) на n, имеем:
$p(n-1)(n+1)=10^5$. (3)
Число n не может быть четным, так как в этом случае два соседних нечетных числа $n-1$ и $n+1$ не могут являться степенями числа 5. Следовательно, число n нечетное, а $n-1$ и $n+1$ - два соседних четных числа, не имеющих простых делителей, кроме 2 и 5.
Выпишем первые два столбца четных чисел так, чтобы в первом столбце стояли числа, не имеющие делителей, кроме 2 и 5.

$n-1$	$n+1$
2	4
8	10
20	22
32	34
50	52
80	82
128	130
200	202

При этом во втором столбце, начиная с третьей строки, все числа имеют простой делитель, кроме 2 и 5. Это означает, что из выписанных множителей $n-1$ и $n+1$ только две пары чисел удовлетворяют условию, т.е. $n=3$ и $n=9$ отвечают условиям задачи. Для последней строки таблицы из равенства (3) получим $p<5$, что невозможно. Поэтому поиск значений n закончен.
При $n=3$ из равенства (3) получим, что $p=12500$, тогда $m=pn=37500$.
При $n=9$ из равенства (3) получим, что $p=1250$, тогда $m=pn=11250$.
Ответ: $m=-11250;\ n=-9$ или $m=-37500;\ n=-3$ или $m=0;\ n=0$ или $m=37500;\ n=3$ или $m=11250;\ n=9$.

4.10. (2010) Найдите все натуральные числа x и y, для которых выполняется равенство
$x^4+x^3+x^2+x+1=y^2$.
Решение. Представим левую часть в виде
$\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}\right)^2+\frac{5}{8}x+\frac{55}{64}=y^2$. Умножая обе части уравнения на 64, получаем
$(8x^2+4x+3)^2+40x+55=(8y)^2$.
Таким образом, $8y>8x^2+4x+3$,
$2y\ge 2x^2+x+1$. Умножим обе части исходного равенства на 4, а затем, используя
$4y^2\ge(2x^2+x+1)^2=4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$,
будем иметь
$4x^4+4x^3+4x^2+4x+4\ge 4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$,
или $x^2-2x-3\le 0$, откуда $x\le 3$. Осталось проверить для x значения 1, 2, 3.
Ответ: $x=3;\ y=11$.

***

Теорема. Если $ab=d^2$, a, b и d – натуральные числа, и числа a и b взаимно просты, то a и b – точные квадраты.

4.11. (2010) Решите в целых числах уравнение $m^4-2n^2=1$. (ММО, 2002, 9 класс)
Решение. Если $(m;n)$ - решение данного уравнения, то $(-m;n)$, $(m;-n)$ и $(-m;-n)$ тоже решения. Поэтому будем искать только неотрицательные решения. Из записи $m^4=2n^2+1$ следует, что m – нечетное число, $m=2t+1$. Перепишем уравнение в виде
$m^4-1=(m-1)(m+1)(m^2+1)=$
$=2t\cdot(2t+2)\cdot(4t^2+4t+2)=2n^2$. Отсюда
$8t\cdot(t+1)\cdot(2t^2+2t+1)=2n^2$, т.е. n – четное число, $n=2p$. Далее получаем уравнение
$t\cdot(t+1)\cdot(2t(t+1)+1)=p^2$. Нетрудно проверить, что числа t, $t+1$ и $2t(t+1)+1$ попарно взаимно просты.
Действительно, пусть, например, $d\mid t+1$ и $d\mid 2t(t+1)+1$, тогда d делит и $2t(t+1)$, а, значит, и разность $(2t(t+1)+1)-(2t(t+1))$. Взаимная простота двух остальных пар доказывается аналогично.
Произведение этих взаимно простых чисел – полный квадрат. Согласно теореме каждое из них также является полным квадратом.
Итак, t и $t+1$ - полные квадраты. Это возможно только при $t=0$. Действительно, если $t=\alpha^2$, $t+1=\beta^2$, где $\alpha\ge 0,\ \beta\ge 0$, то $(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)=1$, поэтому $\beta-\alpha=1,\ \beta+\alpha=1$, так что $\alpha=0$, следовательно, $t=0$. Тогда и $p=0$. Значит, $m=\pm 1;\ n=0$.
Ответ: $m=\pm 1;\ n=0$.

4.12. (2010) Существуют ли рациональные числа x, y, u, v, которые удовлетворяют уравнению $\left(x+y\sqrt{2}\right)^6+\left(u+v\sqrt{2}\right)^6=7+5\sqrt{2}$?

Решение. Так как $\left(x+y\sqrt{2}\right)^6=$
$=x^6+6x^5(y\sqrt{2})+15x^4(y\sqrt{2})^2+20x^3(y\sqrt{2})^3+$
$+15x^2(y\sqrt{2})^4+6x(y\sqrt{2})^5+(y\sqrt{2})^6=$
$=A+B\sqrt{2}$,
$\left(x-y\sqrt{2}\right)^6=$
$=x^6-6x^5(y\sqrt{2})+15x^4(y\sqrt{2})^2-20x^3(y\sqrt{2})^3+$
$+15x^2(y\sqrt{2})^4-6x(y\sqrt{2})^5+(y\sqrt{2})^6=$
$=A-B\sqrt{2}$, то выполняется
$\left(x-y\sqrt{2}\right)^6+\left(u-v\sqrt{2}\right)^6=7-5\sqrt{2}$.
Но $7-5\sqrt{2}<0$, а левая часть положительная. Противоречие. Следовательно, исходного равенства быть не может.

Ответ: таких чисел нет.

4.13. Существуют ли рациональные числа a, b, c, d, которые удовлетворяют уравнению $\left(a+b\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(c+d\sqrt{2}\right)^{2n}=5+4\sqrt{2}$ (где n – натуральное число)? (ММО, 1972, 9 класс)

Ответ: таких чисел нет.

4.14. (2010) Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n, при которых уравнение
$(x^2+y^2)^{2010}=x^n y^n$
имеет натуральные решения.

Решение. При любом n пара $x=1$, $y=1$ не является решением. Поэтому
$(xy)^n=(x^2+y^2)^{2010}\geq(2xy)^n>(xy)^{2010}$.
Значит, $n>2010$.
Предположим, $x\neq y$. Тогда найдется простое число p, такое что $x=p^k a$, $y=p^m b$, и числа a и b не делятся на p. Для определенности можно считать, что $k>m\geq 0$.
Тогда $(p^{2k}a^2+p^{2m}b^2)^{2010}=(p^{k+m}ab)^n$;
$(p^{2(k-m)}a^2+b^2)^{2010}=a^n b^n p^{n(k+m)-2m\cdot 2010}$. (*)
Из условий $n>2010$ и $k>m$ получаем:
$n(k+m)-2m\cdot 2010=(nk-2010m)+m(n-2010)>0$.

Значит, правая часть равенства (*) – целое число, которое делится на p.
Левая часть на p не делится. Противоречие.
Пусть теперь $x=y$, тогда из равенства $(x^2+x^2)^{2010}=(x^2)^n$ получаем: $x^{n-2010}=2^{1005}$. Откуда $x=2^q$, $q=0,1,2,...$ и $q(n-2010)=1005$.
Поэтому $n-2010$ натуральный делитель числа 1005. По условию нас интересуют только наименьшее и наибольшее возможное значение n. Поэтому нужно взять $n-2010=1$ и $n-2010=1005$, откуда $n=2011$ и $n=3015$.
При $n=2011$ $x=y=2^{1005}$, при $n=3015$ $x=y=2$.

***Ответ*:** 2011; 3015.

4.15. (2010) Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n, при которых уравнение
$$\frac{2012\ln(x^2+y^2)}{n}=\ln(xy)$$
имеет натуральные решения.

Указание. Привести уравнение к виду
$(x^2+y^2)^{2012}=x^n y^n$

Ответ: 2013; 3018.

4.16. Решите в целых положительных числах уравнение $x^{2y}+(x+1)^{2y}=(x+2)^{2y}$. (ММО, 1958, 10 класс)

Указание. Если $y=1$, то $x=3$ (второй корень квадратного уравнения $x=-1$ отрицателен).
Пусть $y>1$. Числа x и $x+2$ одной четности, поэтому $(x+1)$ четно: $x+1=2k$. Получаем: $(2k-1)^{2y}+(2k)^{2y}=(2k+1)^{2y}$, откуда несложно увидеть (раскрыв скобки), что y кратно k при $y>1$. Разделив теперь обе части уравнения на $(2k)^{2y}$, получим:
$$2>\left(1-\frac{1}{2k}\right)^{2y}+1=\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2y}>1+\frac{2y}{2k}.$$ Отсюда $y<k$, а потому y не может делиться на k. Значит, при $y>1$ решений нет.

Ответ: $x=3; y=1$.

4.17. Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству
$9x^2y^2+6xy^2-9x^2y+2x^2+y^2-18xy+7x-5y+6=0$.
(МГУ, 1989)

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители
$y^2(3x+1)^2-y(3x+1)(3x+5)+2x^2+7x+6=$
$$=\left(y(3x+1)-\frac{3x+5}{2}\right)^2-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2=$$
$=(y(3x+1)-2x-3)(y(3x+1)-x-2)$.
Откуда следует, что искомые числа удовлетворяют хотя бы одному из уравнений $y(3x+1)-2x-3=0$ или $y(3x+1)-x-2=0$, которые приводятся к виду $(3x+1)(3y-1)=5$

или $(3x+1)(3y-2)=7.$ Решая эти уравнения в целых числах, получаем четыре пары чисел.
Ответ: $(0;-2),(-2;0),(0;3),(2;1).$

4.19. Найдите все тройки целых чисел $(x;y;z)$, для каждой из которых выполняется соотношение $3(x-3)^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2=33.$ (МГУ, 1979)

Решение. Из условия следует, что $3(x-3)^2 \le 33,$ т.е. $(x-3)^2 \le 11.$ Поскольку $(x-3)^2$ является квадратом целого числа $x-3,$ то $(x-3)^2$ равно либо 0, либо 1, либо 4, либо 9. Перепишем исходное уравнение в виде
$3(x-3)^2+(z^2+2)(3y^2+2)=37.$

Если $(x-3)^2=0,$ то $(z^2+2)(3y^2+2)=37.$ Так как 37 – число простое, то последнее равенство выполняться не может.

Если $(x-3)^2=1,$ то $(z^2+2)(3y^2+2)=34.$ Поскольку $z^2+2\ge 2,$ $3y^2+2\ge 2,$ то возможны две системы

$\begin{cases} z^2+2=2 \\ 3y^2+2=17 \end{cases}$ или $\begin{cases} z^2+2=17 \\ 3y^2+2=2, \end{cases}$ которые не имеют решений в целых числах.

Если $(x-3)^2=4,$ то $(z^2+2)(3y^2+2)=25,$ откуда следует система

$\begin{cases} z^2+2=5 \\ 3y^2+2=5, \end{cases}$ которая не имеет решений в целых числах.

Если $(x-3)^2=9,$ т.е. если $x=6$ или $x=0,$ то $(z^2+2)(3y^2+2)=10.$ Так как $z^2+2\ge 2,$ $3y^2+2\ge 2,$ то отсюда следуют две системы

$\begin{cases} z^2+2=5 \\ 3y^2+2=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} z^2+2=2 \\ 3y^2+2=5, \end{cases}$ первая из которых не имеет решений в целых числах. Из второй системы получаем, что либо $z=0, y=1,$ либо $z=0, y=-1.$ Следовательно, исходному соотношению удовлетворяют четыре тройки чисел.

Ответ: $(6;1;0),(6;-1;0),(0;1;0),(0;-1;0).$

5. Дробно-рациональные уравнения

5.1. Решите в натуральных числах уравнение
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$

Решение. Поскольку неизвестные $x,$ $y,$ z входят в уравнение симметрично, то можно считать, что $x\le y\le z.$ Остальные решения получатся перестановками неизвестных. Тогда
$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{3}{x},$ т.е. $x\le 3.$

Очевидно, что $x\ne 1.$

Пусть $x=2,$ т.е. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}.$ Также ясно, что $y\ne 2.$ Если $y=3,$ то $z=6.$ Если $y=4,$ то $z=4.$ Если $y=5,$ то даже $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}<\frac{1}{2},$ т.е. других решений при $x=2$ нет.

Если $x=3,$ то $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}.$ Пусть $y=3,$ тогда $z=3.$ Если $y=4,$ то даже $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<\frac{2}{3},$ т.е. других решений при $x=3$ нет. Следовательно, данное уравнение с учетом перестановок имеет десять решений.

Ответ: $(3;3;3);$ $(2;4;4);$ $(4;2;4);$ $(4;4;2);$ $(2;3;6);$ $(2;6;3);$ $(3;2;6);$ $(3;6;2);$ $(6;2;3);$ $(6;3;2).$

5.2. Решите в натуральных числах уравнение
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}.$

Указание. Выразите из уравнения y и исследуйте полученную функцию.
Ответ: $(4;4);$ $(6;3);$ $(3;6).$

5.3. (2010) Найдите все пары натуральных чисел разной четности, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{12}.$$

Решение. Пусть $m<n.$ Приведем уравнение к виду $12m+12n=mn$ $\Leftrightarrow$
$mn-12m-12n+12^2=12^2$ $\Leftrightarrow$
$(m-12)(n-12)=12^2,$ причем числа $m-12$ и $n-12$ - разной четности.

В качестве возможного разложения
$12^2=2^4\cdot 3^2=pq,$ где p – нечетно, а q – четно, имеем следующие варианты:

1) $\begin{cases} p=1 \\ q=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-12=1 \\ n-12=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13 \\ n=156 \end{cases}$

2) $\begin{cases} p=3 \\ q=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-12=3 \\ n-12=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=15 \\ n=60 \end{cases}$

3) $\begin{cases} p=9 \\ q=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-12=9 \\ n-12=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=15 \\ n=60 \end{cases}$

4) $\begin{cases} p<0 \\ q<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12<m-12<0 \\ -12<n-12<0 \end{cases} \Rightarrow$

$(m-12)(n-12)<12^2$.

Неизвестные m и n входят в уравнение симметрично. Поэтому получаем ответ.

Ответ: $(13;156)$; $(15;60)$; $(21;28)$, $(156;13)$; $(60;15)$; $(28;21)$.

6. Иррациональные уравнения

6.1. Найдите все целые решения уравнения $\sqrt{x+\sqrt{x}} = y-2002$. (Московская математическая регата, 2002/2003, 11 класс)

Решение. Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+\sqrt{x} = (y-2002)^2 \\ y \geq 2002 \end{cases}$$

По условию, x – целое число, поэтому $t=\sqrt{x}$ - также целое.

Чтобы уравнение $t^2+t-(y-2002)^2=0$ имело целые решения, необходимо, чтобы дискриминант $D=1+4(y-2002)^2$ являлся полным квадратом. Так как второе слагаемое, в свою очередь, при всех целых значениях y является полным квадратом, то следующее за ним натуральное число является квадратом тогда и только тогда, когда $(y-2002)^2=0 \Leftrightarrow y=2002$.

Откуда $t=0$ или $t=-1$, то есть, $x=0$.

Ответ: $x=0$; $y=2002$.

6.2. Решите в целых числах уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{98}$.

Решение. Из уравнения видно, что $0 \leq x \leq 98$, $0 \leq y \leq 98$. Представим уравнение в виде $\sqrt{y}=\sqrt{98}-\sqrt{x}$ и возведем обе части уравнения в квадрат:

$y=98+x-2\sqrt{98x}$, $y=98+x-14\sqrt{2x}$.

Отсюда $2x=4a^2$, $x=2a^2$, где a – целое неотрицательное число. Так как $x \leq 98$, то $2a^2 \leq 98$, $a^2 \leq 49$, $0 \leq a \leq 7$.

Для каждого из значений a получаем значения x, и затем значения y.

Ответ: $(0;98)$; $(2;72)$; $(8;50)$; $(18;32)$; $(32;18)$; $(50;8)$; $(72;2)$; $(98;0)$.

7. Показательные уравнения

7.1. (2010) Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m-3^n=1$.

Решение. При любом k число $3^{2k}+1$ при делении на 8 дает остаток 2, а число $3^{2k+1}+1$ при делении на 8 дает остаток 4. Так как при $m \geq 3$ число 2^m делится на 8 без остатка, то равенство $3^n+1=2^m$ возможно при $m=1$ или $m=2$.

Если $m=1$, то получаем $n=0$.

Если $m=2$, то получаем $n=1$.

Ответ: $m=2$, $n=1$.

7.2. (2010) Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $3^n-2^m=1$.

Решение. Пусть n – четное число, т.е. $n=2k$. Тогда $2^m=(3^k-1)(3^k+1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k-1=2$ и $3^k+1=4$, откуда $k=1$ и $n=2$. Тогда $m=3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Нечетная степень тройки при делении на 4 дает остаток 3. Значит, 3^n-1 делится на 4 с остатком 2. Так как при $m \geq 2$ число 2^m делится на 4 без остатка, то равенство $2^m=3^n-1$ возможно в случае $m=1$. Тогда $n=1$.

Ответ: $m=3$, $n=2$ или $m=n=1$.

7.3. (2010) Решите в натуральных числах уравнение $2^x-15=y^2$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $x=2k+1$ (x – нечетное число). Поскольку 2^2 при делении на 3 дает в остатке 1, то и $2^{2k}=\left(2^2\right)^k$ дает в остатке 1, а $2^{2k+1}=2\cdot 2^{2k}$ дает в остатке 2. Число 15 делится на 3, следовательно, левая часть уравнения при делении на 3 дает в остатке 2. Правая часть (квадрат числа) дает при делении на 3 в остатке 0 или 1 (докажите). Таким образом, равенство невозможно (левая и правая части дают при делении на 3 разные остатки).

2) $x=2k$. Тогда $2^{2k}-y^2=15$, откуда $\left(2^k-y\right)\left(2^k+y\right)=15$. Оба множителя слева целые и положительные (так как второй множитель положителен), второй больше первого. Возможны два варианта:

$$\begin{cases} 2^k-y=1 \\ 2^k+y=15 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2^k-y=3 \\ 2^k+y=5 \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем ответ.

Ответ: $(4;1)$; $(6;7)$.

7.6. (2010) Решите в целых числах уравнение $1+2^k+2^{2k+1}=n^2$.

Решение. При $k=1$ получаем уравнение $n^2=11$, которое не имеет решений в целых числах.

Если $k=0$, то $n=\pm 2$.

При $k=-1$ уравнение не имеет решений в целых числах.

Если $k<-1$, то уравнение не имеет решений, так как левая часть данного уравнения принимает значения из промежутка $(1;2)$.

Пусть $k\geq 2$. Как известно, четные степени двойки дают при делении на 3 остаток 1, нечетные – 2. Отсюда следует, что $1+2^{2k+1}$ делится на 3 без остатка, а число $1+2^k+2^{2k+1}$ при делении на 3 дает такой же остаток, как у 2^k. С другой стороны, квадраты целых чисел не могут давать при делении на 3 остаток 2. Таким образом, k – четное. Положим $k=2d$, $d\in N$ и перепишем уравнение в виде $1+4^d+2\cdot 4^{2d}=n^2$. Отсюда следует, что n – нечетное, т.е. $n=2x+1$, $x\in N$. Получаем уравнение

$1+4^d+2\cdot 4^{2d}=4x^2+4x+1$;

$4^d(1+2\cdot 4^d)=4(x^2+x)$; $\quad 4^y(1+8\cdot 4^y)=x(x+1)$,

где $y=d-1$. Причем $y>0$, так как при $d=1$, т.е. $y=0$ последнее уравнение не имеет решений.

Из чисел x и $x+1$ только одно четное, и оно делится на 4^y.

Если $x=m\cdot 4^y$ (причем m – нечетное, $m\in N$), то имеем $4^y(1+8\cdot 4^y)=m\cdot 4^y(m\cdot 4^y+1)$;

$1+8\cdot 4^y=m^2\cdot 4^y+m$; $(8-m^2)\cdot 4^y=m-1$. Сравнивая знаки левой и правой частей последнего уравнения, получаем одно нечетное $m=1$, которое не является решением.

Если $x+1=m\cdot 4^y$ (причем m – нечетное, $m\in N$), то имеем $4^y(1+8\cdot 4^y)=(m\cdot 4^y-1)m\cdot 4^y$;

$1+8\cdot 4^y=m^2\cdot 4^y-m$; $(m^2-8)\cdot 4^y=m+1$. Выражение m^2-8 неотрицательно при натуральных $m\geq 3$. Если $m=3$, то $y=1$ (что приводит к решению исходного уравнения $k=4;\ n=\pm 23$).

При натуральных $m\geq 4$ будет $m^2-8>m+1$, и решений нет.

Ответ: $k=0;\ n=\pm 2$ или $k=4;\ n=\pm 23$.

***

Теорема. Если остаток от деления a_1 на b равен r_1, а остаток от деления a_2 на b равен r_2, то остаток от деления a_1+a_2 на b равен остатку от деления r_1+r_2 на b.

Опорная задача. Докажите, что остаток от деления на 3 числа 5^k равен 1, если k четно, и 2, если k нечетно.

7.7. (2010) Решите уравнение $3^m+4^n=5^k$ в натуральных числах. (ММО, 1998, 11 класс)

Решение. Правая часть уравнения при делении на 3 должна давать тот же остаток, что и левая, т.е. 1 (см. теорема). Поэтому k четное число (см. задача). Аналогично, левая часть уравнения делится на 4 с остатком 1, поэтому число m тоже четное. Итак, $4^n=5^k-3^m=5^{2k_0}-3^{2m_0}$, т.е. $2^{2n}=(5^{k_0}-3^{m_0})(5^{k_0}+3^{m_0})$. Поэтому $5^{k_0}-3^{m_0}=2^p$ и $5^{k_0}+3^{m_0}=2^q$, где p и q – целые неотрицательные числа $p+q=2n$. Таким образом, $5^{k_0}=\frac{1}{2}(2^p+2^q)$ и

$3^{m_0}=\frac{1}{2}(2^q-2^p)=2^{q-1}-2^{p-1}$. Значит, число $2^{q-1}-2^{p-1}$ нечетно, поэтому $p=1$. Значит, $2^p=2$ и $3^{m_0}=2^{q-1}-1$. Следовательно, число $q-1$ четно, $q-1=2s$ (иначе левая часть не делится на 3). Тогда $3^{m_0}=(2^s-1)(2^s+1)$ - произведение двух множителей, отличающихся на 2 и являющиеся степенями тройки. Ясно, что эти множители равны 1 и 3. Тогда $s=1$, $l=2s+1=3$. Теперь получаем $m=n=k=2$.

Ответ: $m=n=k=2$.

8. Уравнения смешанного типа

8.1. (2010) Найдите все пары натуральных k и n таких, что $k<n$ и $\left(\frac{1}{n}\right)^k=\left(\frac{1}{k}\right)^n$.

Указание. Приведите уравнение к виду $(n)^k=(k)^n$.

Ответ: $k=2,\ n=4$.

8.2. Найдите все целые корни уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right)=1$. (МГУ, 1979)

Решение. Из данного уравнения получаем $\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)=2\pi n$, $n\in Z$. Отсюда приходим к иррациональному уравнению

$\sqrt{9x^2+160x+800}=3x-16n,$ которое равносильно системе

$$\begin{cases} 9x^2+160x+800=(3x-16n)^2, \\ 3x-16n\geq 0;\ x,n\in Z \end{cases}$$

Уравнение системы приведем к виду $x(3n+5)=8n^2-25.$ (*)

Так как $8n^2-25=8\left(n^2-\frac{25}{9}\right)-\frac{25}{9}=$ $=\frac{8}{9}(3n+5)(3n-5)-\frac{25}{9}$, то уравнение (*) имеет вид $8(3n+5)(3n-5)-9x(3n+5)=25$ или $(3n+5)(8(3n-5)-9x)=25.$ Последнее равенство означает, что $3n+5$ является делителем числа 25, т.е. $3n+5$ есть одно из чисел $\pm 1,\pm 5,\pm 25.$ Непосредственной проверкой убеждаемся, что это возможно только если n равняется одному из чисел $n_1=-10,$ $n_2=-2,$ $n_3=0.$ Соответствующие значения x находятся из равенства (*): $x_1=-31,$ $x_2=-7,$ $x_3=-5.$ Условию $3x-16n\geq 0$ удовлетворяют значения $n_1=-10,$ $x_1=-31$ и $x_2=-7,$ $n_2=-2.$

Ответ: $x_1=-31,$ $x_2=-7.$

9. Уравнения, содержащие знак факториала

9.1. (2010) Решите в натуральных числах уравнение $n!+5n+13=k^2$, где $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ - произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

Решение. Предположим, что $n\geq 5.$ Тогда $n!$ делится на 2 и 5, а значит десятичная запись числа в левой части оканчивается на 3 или на 8. Перебор по последней цифре показывает, что квадрат целого числа не может оканчиваться ни на 3, ни на 8.

Наконец, перебирая n от 1 до 4 находим единственное решение.

Ответ: $n=2;\ k=5.$

9.2. Уравнение $x!+y!=(x+y)!$ решите в целых числах.

Решение. Рассмотрим случай, когда $x<y,$ тогда

$x!\cdot\left(1+(x+1)(x+2)\ldots y\right)=x!(x+1)(x+2)\ldots(x+y).$

Поделив обе части этого уравнения на $x!,$ легко заметить, что правая часть делится на $x+1,$ а левая не делится, т.е. в этом случае данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Аналогично рассматривается случай, когда $x>y$. Пусть $x=y,$ т.е. $2x!=(2x)!$ Поделив обе части этого уравнения на $x!,$ получим $2=(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot 2x,$ т.е. $x=1,$ а следовательно, и $y=1.$

Ответ: $x=1,$ $y=1.$

9.3. Найдите все натуральные значения n, для которых выполняется равенство: $n^3-n=n!.$ (Московская математическая регата, 2003/2004, 11 класс)

Решение. Запишем данное уравнение в виде $n(n-1)(n+1)=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2\cdot 1.$ Так как $n=1$ не является его решением, то разделим обе части уравнения на $n(n-1).$ Получим, что $n+1=(n-2)(n-3)\ldots 2\cdot 1.$ Проверяя последовательные натуральные значения $n,$ начиная с $n=2,$ получим, что решением уравнения является $n=5.$ Так как для всех $n>5$ верно, что $n+1<2n-4=2(n-2),$ то $n+1<(n-2)\cdot 2<(n-2)(n-3)\ldots 2\cdot 1,$ поэтому других натуральных решений данное уравнение не имеет.

Ответ: $n=5.$

10. Уравнения с простыми числами

10.1. Уравнение $x^2-2y^2=1$ решите в простых числах.

Решение. Так как $2y^2$ - четное число, то x – нечетно, и потому число $2y^2=x^2-1=(x-1)(x+1)$ делится на 4. Следовательно, y – четное число, и поскольку x и y должны быть простыми числами, то $y=2,$ а потому $x=3.$

Ответ: $x=3,$ $y=2.$

10.2. Решите в простых числах уравнение $x^y+1=z$.

Решение. Число z больше 2, так как если $z=2,$ то $x=1,$ а это не возможно. Тогда z нечетно, а следовательно, число x четно. Но x - простое, поэтому $x=2.$ Получаем уравнение: $2^y+1=z.$ Если y нечетно, то сумма 2^y+1 делится на 3, причем частное от такого деления больше 1; но в этом случае z составное. Значит, число y четное, т.е. $y=2.$ Находим $z=5.$

Ответ: $x=2,$ $y=2,$ $z=5.$

11. Неразрешимость уравнений

11.1. Докажите, что уравнение $x!+y!=10z+9$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение. Так как правая часть уравнения – нечетное число, то и левая часть должна быть нечетным числом. Поэтому или x, или y меньше 2. Пусть для определенности, $x=1$, т.е. $y!=10z+8.$ Правая часть последнего равенства не делится на 5, а потому $y \le 4,$ но ни одно из натуральных чисел, которые удовлетворяют этому неравенству, не служат решением данного уравнения. Итак, данное равнение не имеет решений в натуральных числах.

11.2. Докажите, что уравнение $x^3+y^3=4(x^2y+xy^2+1)$ не имеет решений в целых числах. (ВМО, 1992, 9 класс)

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x+y)^3=7(x^2y+xy^2)+4.$ Так как куб целого числа не может давать остаток 4 при делении на 7, то уравнение не имеет решений в целых числах.

Замечание. Другие решения задачи можно получить, рассматривая остатки, которые могут давать числа x и y при делении на 4, или заметив, что из уравнения следует, что $x+y$ - делитель числа 4.

11.3. Докажите, что выражение $x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5$ не равно 33 ни при каких целых значениях x и y. (ММО, 1946, 8-9 классы)

Указание. Данное выражение преобразуйте к виду $(x-2y)(x-y)(x+y)(x+2y)(x+3y)$. Полученные сомножители попарно различны. Но число 33 нельзя разложить более чем на 4 различных сомножителя.

11.4. Доказать, что равенство $x^2+y^2+z^2=2xyz$ для целых чисел x, y, z возможно только при $x=y=z=0$. (ММО, 1949, 7-8 классы)

Указание. Правая часть равенства всегда делится на более высокую степень двойки, чем левая.

11.5. Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2+2010=n^2$?

Указание. Не существуют, так как m^2-n^2 нечетно или кратно 4, а 2010 – нет.

11.6. Докажите, что уравнение $x^2+1=3y$ не имеет решений в целых числах.

Указание. Рассмотреть остатки от деления левой и правой части на 3.

12. Текстовые задачи

12.1. (2010) Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа A за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа B за несколько рейсов, причём в этом случае число рейсов каждого автобуса типа B будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа A. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа B входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа A?

Решение. Пусть в автобус типа B входит k человек, а в автобус типа A входит $k+7$ человек, и пусть каждый из трех автобусов типа B сделает по m рейсов, а каждый из двух автобусов типа A по $m+1$. Так как в обоих случаях автобусы перевезут одно и то же количество детей, получаем уравнение: $3km=2(k+7)(m+1)$; $km=14m+2k+14$; $m(k-14)=2k+14.$

При $k>14$ получаем: $m=\dfrac{2k+14}{k-14}$ или

$$m=2+\frac{42}{k-14}.$$

Число $k-14$ - это один из восьми делителей числа 42. Перебирая их по очереди, мы получим все возможные решения (8 пар чисел k и m). Вот они: (15; 44), (16; 23), (17; 16), (20; 9), (21; 8), (28; 5), (35; 4), (56; 3).

Для каждой пары последовательно находим количества перевозимых детей, равные $3km$: 1980, 1104, 816, 540, 504, 420, 420 и 504. Из них выбираем наибольшее.

***Ответ*:** 1980 детей перевозятся тремя автобусами типа B (по 15 человек) за 44 рейса или двумя автобусами типа A (по 22 человека) за 45 рейсов.

12.2. (2010, 10 класс) Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 шарика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

Решение. Пусть в каждой из x коробок лежит три пакетика, по n шариков в каждом. Во втором случае коробок $x+2$, пакетиков в коробке 2, а шариков в пакетике $n+3$. По условию задачи получаем: $3nx = 2(n+3)(x+2)$, откуда $n = \frac{6x+12}{x-4} = 6 + \frac{36}{x-4} = 6\left(1 + \frac{6}{x-4}\right)$.

Заметим, что из $n > 0$ следует, что $\frac{6}{x-4} > -1$, откуда $x > 4$. Учитывая, что числа n и x натуральные, получаем, что $x-4$ - натуральный делитель числа 36. Количество шариков при этом

$$f(x) = 3nx = 18\left(x + \frac{6x}{x-4}\right) = 18\left(x + \frac{24}{x-4}\right) + 108.$$

Решение находим перебором делителей.

***Ответ*:** 840.

Комментарий. Перебор можно заменить исследованием функции. Функция $y = x + \frac{24}{x-4}$ монотонно убывает при $4 < x \le 4 + 2\sqrt{6}$ и монотонно возрастает при $x \ge 4 + 2\sqrt{6}$. Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ достигается, если $x-4$ - наибольший или наименьший натуральный делитель числа 36.

Если $x - 4 = 1$, то $x = 5$,

$f(5) = 18(5+24) + 108 = 630$.

Если $x - 4 = 36$, то $x = 40$,

$$f(40) = 18\left(40 + \frac{2}{3}\right) + 108 = 840.$$

Предполагаемые критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

12.4. Целые числа x, y и z образуют геометрическую прогрессию, а числа $5x+3$, y^2 и $3z+5$ - арифметическую прогрессию (в указанном порядке). Найдите x, y и z. (МГУ, 2008)

Решение. Из системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 = xz \\ 2y^2 = 5x + 3z + 8 \\ x, y, z \in Z \end{cases}$$

получим соотношение $2xz = 5x + 3z + 8 \Leftrightarrow$ $2z = 5 + \frac{31}{2x-3}$. Учитывая условие целочисленности, приходим к выводу, что выражение $\frac{31}{2x-3}$ принимает целые значения, т.е. разность $2x-3$ является делителем 31. Итак, возможны лишь случаи $2x - 3 = \pm 1; \pm 31$. Осуществляя их перебор с учетом требований $xz \ge 0$, $y \in Z$, имеем единственную возможность $x = 2$, $z = 18$, $y^2 = 36$, приводящую к ответу.

***Ответ*:** $(2;6;18), (2;-6;18)$.

12.5. (2010, 10 класс) Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 1000 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

Решение. Пусть $a = a'^2$, $b = b'^2$, $c = c'^2$;

$a' < b' < c'$; $a' \ge 32$; $b' = a' + t$, $t \in Z$.

Тогда $2a'^2 + 4a't + 2t^2 = a'^2 + c'^2$;

$(a' + 2t + c')(a' + 2t - c') = 2t^2$. Положим

$p = a' + 2t + c'$, $q = a' + 2t - c'$; $p - q = 2c'$.

Значит, числа p и q – одинаковой четности, а так как $pq = 2t^2$, то $p = 2n$, $q = 2m$ $(n, m \in Z)$.

Отсюда $t = 2v$ $(v \in Z)$.

Значит,

$$\begin{cases} a' + 2t = \frac{p+q}{2} = n + m \\ c' = \frac{p-q}{2} = n - m \\ nm = 2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = n + m - 4v \ge 32 \\ c' = n - m \ge 34 \\ nm = 2v^2 \end{cases}$$

При этих условиях необходимо найти минимум $b' = n + m - 2v$.

Так как $n \ge 35$, $m \ge 1$, то $2v^2 = nm \ge 35$. Отсюда $v \ge 5$.

Далее перебираем случаи:

1) $v=5$. Тогда $\begin{cases} nm=50,\ n+m\ge 52 \\ n-m\ge 34,\ n\ge 35,\ m\ge 1 \end{cases}$ Решений нет.

2) $v=6$. Тогда $\begin{cases} nm=72,\ n+m\ge 56 \\ n-m\ge 34,\ n\ge 35,\ m\ge 1 \end{cases}$ Отсюда $b'=61$.

3) $v=7$. Тогда $\begin{cases} nm=98,\ n+m\ge 60 \\ n-m\ge 34,\ n\ge 35,\ m\ge 1 \end{cases}$ Отсюда $b'=85$.

4) $v=8$. Тогда $\begin{cases} nm=128,\ n+m\ge 64 \\ n-m\ge 34,\ n\ge 35,\ m\ge 1 \end{cases}$ Отсюда $b'=113$; $b'=50$.

5) $v=9$. Тогда $b'\ge 32+2v\ge 32+18=50$.

Значит, наименьшее значение $b=b'^2=2500$, при этом $a=34^2$; $c=62^2$.

Ответ: 2500.

12.7. (2010) Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1=5,\ a_2=8,...,\ a_N$ и $b_1=9,\ b_2=14,...,\ b_M$ совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Решение. Имеем $a_m=5+3(m-1),\ m=1,...,N$ и $b_k=9+5(k-1),\ k=1,...,M$.

Общие члены прогрессий удовлетворяют уравнению $5+3(m-1)=9+5(k-1)\ \Leftrightarrow\ 3m=5k+2$.

Левая часть последнего уравнения делится на 3, поэтому $k=3n-1;\ 3m=15n-3$, где $1\le n\le L$.

Найдем L. Общие члены двух прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с первым членом равным 14, а последним – равным $15L-1$.

Значит,

$\dfrac{14+15L-1}{2}L=815\ \Leftrightarrow\ 15L^2+13L-1630=0$. Отсюда $L=10$. Поэтому $M=3L-1=29$, $N=5L-1=49$.

Ответ: 49 и 29.

12.8. (2010) Найдите все пары пятизначных чисел x, y, такие, что число $\overline{xy}$, полученное приписыванием десятичной записи числа y после десятичной записи числа x, делится на xy.

Решение. Условию задачи соответствует уравнение $10^5\cdot x+y=nxy$. Перепишем это уравнение в виде $10^5\cdot x=y(nx-1)$.

Так как $nx-1$ не делится на x, то y делится на x, т.е. $y=tx$. Тогда $10^5=t(nx-1)$. Из последнего равенства следует, то t должно быть делителем числа 10^5. При этом t не может быть слишком большим: число $nx-1$ не меньше, чем 9999. Следовательно, t должно содержаться среди чисел 1, 2, 4, 5, 8, 10.

1) $t=1$. Имеем $nx=10^5+1=100001$. Заметим, что число n не должно быть больше 10, в противном случае x не будет пятизначным. Используя признаки делимости, убеждаемся, что число 100001 не имеет делителей меньше 11. Таким образом, значение $t=1$ не подходит.

2) $t=2$. Имеем $nx=10^5/2+1=50001$. При $n=1$ получаем $x=50001$, но тогда $y=100002$ оказывается шестизначным числом. Если $n=3$, то получаем $x=16667$ и $y=33334$. Найденные числа удовлетворяют условиям задачи. Других делителей, кроме $n=1;\ 3$, при которых частное $50001/n$ было бы пятизначным, число 50001 не имеет.

3) $t=4$. Имеем $nx=10^5/4+1=25001$. Так как x – пятизначное число, n не должно превышать числа 2. При $n=1$ получаем $x=25001$. Но тогда $y=100004$ оказывается шестизначным числом.

4) $t=5$. Имеем $nx=10^5/5+1=20001$. Так же, как и выше, при $n=1$ число y оказывается шестизначным.

5) $t=8$. Имеем $nx=10^5/8+1=12501$. При $n=1$ получаем $x=12501$ и $y=100004$.

6) $t=10$. Имеем $nx=10^5/10+1=10001$. При $n=1$ получаем $x=10001$ и $y=100010$.

Ответ: $x=16667$; $y=33334$.

13. Уравнения, содержащие функцию «целая часть числа» $[x]$

13.1. Решите уравнение $\left[\dfrac{8x+19}{7}\right]=\dfrac{16(x+1)}{11}$.

Решение. Корень уравнения должен удовлетворять неравенствам

$0\le\dfrac{8x+19}{7}-\dfrac{16(x+1)}{11}<1$, т.е. $\dfrac{5}{6}<x\le 4\dfrac{1}{24}$. (1)

Положим $\dfrac{16(x+1)}{11}=t$, где t – целое число. Отсюда $x=\dfrac{11t-16}{16}$. (2)

Подставив это выражение x в данное уравнение, получим:

$$\left[\frac{11t+22}{14}\right]=t.$$

По определению целой части числа

$$0\le\frac{11t+22}{14}-t<1.\text{ Отсюда }\ 2\frac{2}{3}<t\le 7\frac{1}{3}.$$

Следовательно, неизвестное t может принимать лишь следующие целые значения: 3, 4, 5, 6, 7. Подставляя последовательно каждое из этих значений t в уравнение (2), найдем, что при условии (1) исходное уравнение имеет лишь пять корней.

Ответ: $1\frac{1}{16};\ 1\frac{3}{4};\ 2\frac{7}{16};\ 3\frac{1}{8};\ 3\frac{13}{16}.$

13.3. Решите уравнение $x+[10x]=10x.$ (МГУ, 1996)

Решение. Поскольку $[x]+\{x\}=x,$ уравнение можно переписать в виде $x=\{10x\}.$ Введем новую неизвестную $10x=t.$ Для нее наше уравнение примет вид $\frac{t}{10}=\{t\}.$ (*)

Это уравнение равносильно бесконечной совокупности систем

$$\begin{cases} n\le t<n+1\\ \frac{t}{10}=t-n,\ n\in Z\end{cases}$$

Уравнение $\frac{t}{10}=t-n$ при всех $n\in Z$ имеет единственный корень $t_n=\frac{10n}{9}.$ Это число будет корнем уравнения (*) тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$n\le\frac{10n}{9}<n+1\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} n\ge 0\\ n<9\end{cases}\ \Leftrightarrow\ n=0,1,....,8.$$

Ответ: $x_n=\frac{n}{9},\ n=0,1,....,8.$

13.4. Решите уравнение $x^3-[x]=3.$ (ММО, 1957, 9 класс)

Указание. $[x]=x-\{x\},$ где $0\le\{x\}<1$ - дробная часть; $x^3-x+\{x\}=3,$ откуда $2<x(x^2-1)\le 3.$

Ответ: $\sqrt[3]{4}.$

13.5. (2010) Найдите все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению

$2008\left[n\sqrt{1004^2+1}\right]=n\left[2008\sqrt{1004^2+1}\right],$ где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x.

Решение. Понятно, что

$1004<\sqrt{1004^2+1}<1005.$ (*)

Пусть $\sqrt{1004^2+1}=1004+a.$

Покажем, что $\frac{1}{2009}<a<\frac{1}{2008}.$ (**)

Действительно, $a=\sqrt{1004^2+1}-1004=$

$$=\frac{(\sqrt{1004^2+1}-1004)(\sqrt{1004^2+1}+1004)}{\sqrt{1004^2+1}+1004}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1004^2+1}+1004}.$$

Поэтому

$$a=\frac{1}{\sqrt{1004^2+1}+1004}>\frac{1}{1005+1004}=\frac{1}{2009}\ \text{ и}$$

$$a=\frac{1}{\sqrt{1004^2+1}+1004}<\frac{1}{1004+1004}=\frac{1}{2008}.$$

Теперь, используя (**), получаем

$2009a>1$ и $2008a<1.$ (***)

Тогда $n\left[2008\sqrt{1004^2+1}\right]=n\left[2008(1004+a)\right]=$

$=n\left[2008(1004+a)\right]=n\left[2008\cdot 1004+2008a\right]=n\cdot 2008\cdot 20$

При $n=1,...,2008,$ используя (***), вычисляем

$2008\left[n\sqrt{1004^2+1}\right]=2008[n(1004+a)]=$

$=2008[n\cdot 1004+n\cdot a)]=2008\cdot n\cdot 1004$ и следовательно, для $n=1,...,2008$ выполнено соотношение из задачи.

При $n\ge 2009,$ используя (***), вычисляем

$2008\left[n\sqrt{1004^2+1}\right]=2008[n(1004+a)]=$

$=2008[n\cdot 1004+n\cdot a)]=2008\cdot(n\cdot 1004+1)$ и следовательно, для $n\ge 2009$ соотношение из условия задачи не выполнено.

Ответ: $n=1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 2008.$

14. Неравенства

14.1. (2010) Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+y^2<18x-20y-166\\ 32x-y^2>x^2+12y+271\end{cases}$$

Решение. Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2+(y+10)^2<15\\ (x-16)^2+(y+6)^2<21\\ x,\ y\in Z\end{cases}$$

Из первого и второго неравенства системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2<15\\ (x-16)^2<21;\end{cases}\quad \begin{cases} 6\le x\le 12\\ 12\le x\le 20;\end{cases}\quad x=12.$$

Подставляя $x=12$ в систему, получаем:

$$\begin{cases}(y+10)^2<6\\(y+6)^2<5\\y\in Z;\end{cases}\quad\begin{cases}-2\le y+10\le 2\\-2\le y+6\le 2\\y\in Z;\end{cases}\quad\begin{cases}-12\le y\le -8\\-8\le y\le -4\\y\in Z;\end{cases}$$

$y=-8.$

Ответ: $(12;-8)$.

14.2. (2010) Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases}2x^2+2y^2+24x-28y+167<0\\x+2y<\dfrac{15}{2}\end{cases}$$

Решение. Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases}(x+6)^2+(y-7)^2<\dfrac{3}{2}=\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2\\x+2y<\dfrac{15}{2}\\x,\ y\in Z\end{cases}$$

Первое неравенство имеет пять пар решений: $(-6;7)$, $(-5;7)$, $(-6;8)$; $(-7;7)$, $(-6;6)$.

Второму условию системы удовлетворяют только четвертая и пятая пары.

Ответ: $(-7;7)$, $(-6;6)$.

14.3. Найдите все целые решения неравенства $x-1<\log_6(x+3)$. (МГУ, 1972)

Первое решение показано в разделе «Методы решения».

Второе решение. В область допустимых значений неизвестной входят только $x>-3$, и легко проверить непосредственно, что числа $-2;-1;0;1$ являются решениями данного неравенства.

При подстановке следующих значений, мы видим, что они не являются решениями: при увеличении x разность между левой и правой частями увеличивается.

Задача сводится к следующей: доказать, что функция $f(x)=x-\log_6(x+3)$ - возрастающая.

Имеем $f(x+1)-f(x)=$

$=x+1-\log_6(x+4)-x+\log_6(x+3)=$

$=\log_6\dfrac{x+3}{x+4}+1$, так что неравенство

$f(x+1)-f(x)>0$ равносильно неравенству

$\dfrac{x+3}{x+4}>\dfrac{1}{6}$, которое выполняется при положительных значениях x. Следовательно, неравенство выполняется только при полученных выше значениях.

Ответ: $-2;-1;0;1$

14.6. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases}\left|x^2-2x\right|<y+1\\y+|x-1|<2\end{cases}\quad\text{(МГУ, 2006)}$$

Указание. Из данной системы следует, что $-1<y<2$, так что возможны лишь $y=0$ и $y=1$.

Ответ: $(0;0)$, $(2;0)$, $(1;1)$.

15. Задачи с параметрами

15.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x и y, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases}-15x^2+11xy-2y^2=7\\x<y\\2a^2x+3ay<0\end{cases}\quad\text{(МГУ, 1985)}$$

Решение. Уравнение системы приводим к виду $(3x-y)(2y-5x)=7$ и затем решаем четыре системы уравнений в целых числах. Из четырех решений $(15;38)$, $(9;26)$, $(-15;-38)$, $(-9;-26)$ только пары $(15;38)$ и $(9;26)$ удовлетворяют неравенству $x<y$.

Таким образом, требуется найти все значения параметра a, при каждом из которых выполняется только одно из неравенств

$2a^2\cdot 15+3a\cdot 38<0$ и $2a^2\cdot 9+3a\cdot 26<0$ или $5a^2+19a<0$ и $3a^2+13a<0$.

Множество решений первого неравенства имеет вид $-\dfrac{19}{5}<a<0$. Решения второго неравенства составляют промежуток $-\dfrac{13}{3}<a<0$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют все числа a из промежутка $-\dfrac{13}{3}<a\le-\dfrac{19}{5}$.

Ответ: $-\dfrac{13}{3}<a\le-\dfrac{19}{5}$.

15.3. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2+5(x+1)+3|x-p|+p\le 0$ максимально. (МГУ, 1992)

Решение. Найдем графическое решение данного неравенства. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x-p\ge 0$, т.е. $p\le x$, тогда имеем
$x^2+5x+5+3x-3p+p\le 0$ или
$p\ge \frac{1}{2}\left(x^2+8x+5\right)$.

Системе $\begin{cases} p\le x \\ p\ge 0{,}5\left(x^2+8x+5\right)\end{cases}$ удовлетворяют координаты точек, расположенных не выше прямой $p=x$ и не ниже параболы
$p=0{,}5\left(x^2+8x+5\right)$ с вершиной $(-4;-5{,}5)$.

2) Пусть $x-p\le 0$, т.е. $p\ge x$, тогда имеем
$x^2+5x+5-3x+3p+p\le 0$ или
$p\le -\frac{1}{4}\left(x^2+2x+5\right)$.

Системе $\begin{cases} p\ge x \\ p\le -0{,}25\left(x^2+8x+5\right)\end{cases}$ удовлетворяют координаты точек, расположенных не ниже прямой $p=x$ и не выше параболы
$p=-0{,}25\left(x^2+2x+5\right)$ с вершиной $(-1;-1)$.

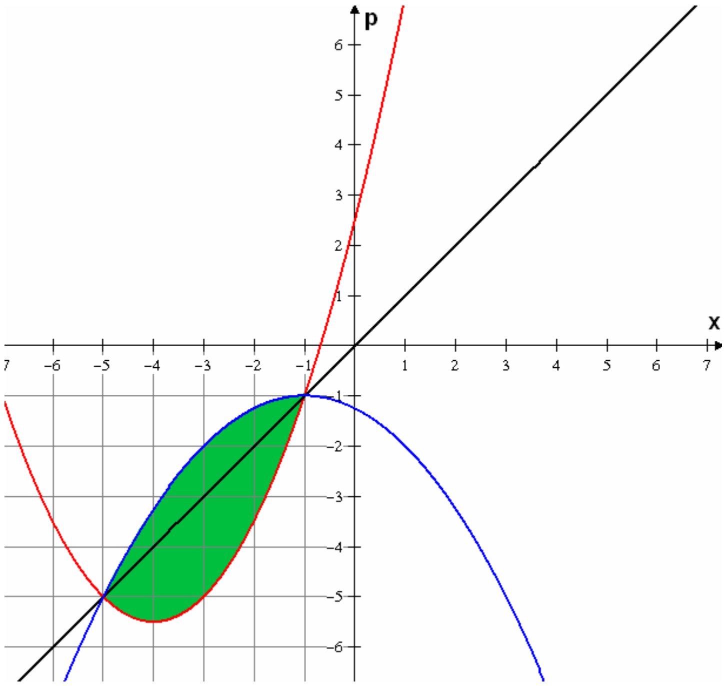
3) Найдем координаты точек пересечения двух парабол и каждой из парабол с прямой $p=x$.

а) $\begin{cases} p=x \\ p=0{,}5\left(x^2+8x+5\right)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=-1 \\ p=-1\end{cases} \right. \left.\begin{cases} x=-5 \\ p=-5\end{cases}\right.$

б) $\begin{cases} p=x \\ p=-0{,}25\left(x^2+2x+5\right)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=-1 \\ p=-1\end{cases} \right. \left.\begin{cases} x=-5 \\ p=-5\end{cases}\right.$

в) $\begin{cases} p=-0{,}25\left(x^2+2x+5\right) \\ p=0{,}5\left(x^2+8x+5\right)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=-1 \\ p=-1\end{cases} \right. \left.\begin{cases} x=-5 \\ p=-5\end{cases}\right.$

Таким образом, область решений данного неравенства задается условиями:
$-5\le x\le -1$;
$0{,}5\left(x^2+8x+5\right)\le p\le -0{,}25\left(x^2+2x+5\right)$. (*)



4) В данном множестве решений имеются точки с целочисленной координатой $x=-5$, $x=-4$, $x=-3$, $x=-2$, $x=-1$.

Подставим $x=-5$ в неравенство (*), получим $p=-5$.

Подставим $x=-4$ в неравенство (*), получим $-5{,}5\le p\le -3{,}25$.

Подставим $x=-3$ в неравенство (*), получим $-5\le p\le -2$.

Подставим $x=-2$ в неравенство (*), получим $-1{,}5\le p\le -1{,}25$.

Подставим $x=-1$ в неравенство (*), получим $p=-1$.

5) Каким может быть максимальное число целых решений? От одного до пяти.
Если считать, что их пять, тогда система пяти полученных условий должна быть совместна. Но она не имеет решений.
Если считать, что их четыре последовательных числа, то решая систему из первых четырех условий и систему следующих четырех условий, получаем, что они не совместны.
Пусть имеется три последовательных целых решений, тогда решаем системы из трех последовательных условий:

а) $\begin{cases} p=-5 \\ -5{,}5\le p\le -3{,}25 \\ -5\le p\le -2\end{cases} \Leftrightarrow \ p=-5$;

б) $\begin{cases} -5{,}5\le p\le -3{,}25 \\ -5\le p\le -2 \\ -3{,}5\le p\le -1{,}25\end{cases} \Leftrightarrow \ -3{,}5\le p\le -3{,}25$;

в) $\begin{cases} -5 \le p \le -2 \\ -3{,}5 \le p \le -1{,}25 \\ p = -1 \end{cases}$ нет решений.

Ответ: $\{-5\} \cup [-3{,}5; -3{,}25]$.

15.6. (2010, 10 класс) Найдите все значения параметра, при каждом из которых среди значений функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$ есть ровно одно целое число.

Решение. Функция определена и непрерывна при всех $x \in R$. Выделим целую часть $y = 1 - \dfrac{2x + 6 - a}{6 + x^2}$. Отсюда следует, что при любом a среди значений функции есть число 1, для этого достаточно выполнения условия

$2x + 6 - a = 0$ или $x = \dfrac{a - 6}{2}$.

Теперь поставим условия, при которых множество значений данной функции содержатся в промежутке (0; 2) при всех значениях $x \in R$.

$$0 < 1 - \frac{2x + 6 - a}{6 + x^2} < 2 \iff -1 < -\frac{2x + 6 - a}{6 + x^2} < 1$$

$$\iff -6 - x^2 < -2x - 6 + a < 6 + x^2 \iff$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + a > 0 \\ x^2 + 2x + 12 - a > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} D' = 1 - a < 0 \\ D' = 1 - 12 + a < 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a > 1 \\ a < 11 \end{cases} \iff 1 < a < 11.$$

Ответ: $1 < a < 11$.

15.8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $6x^2 + 4a^2 + 6ax - 3x - 24a + 35 < 0$ содержит хотя бы одно целое решение. (МГУ, 2007)

Указание. Необходимым и достаточным условием существования решений квадратного относительно a неравенства является

$(3x - 12)^2 - 4(6x^2 - 3x + 35) > 0$, т.е.

$-2 - \dfrac{8}{\sqrt{15}} < x < -2 + \dfrac{8}{\sqrt{15}}$. Полученному интервалу принадлежат всего пять целых значений x, для каждого из которых надо найти соответствующие значения параметра a.

Ответ: (2; 7).

15.9. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно пять различных наборов натуральных чисел $(x; y; z)$ удовлетворяет системе условий

$$\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0 \\ a \cdot yz + a \cdot xz + a \cdot xy > xyz. \end{cases}$$ (МГУ, 1999)

Указание. Из первого уравнения получаем $y = 6x + 7 + \dfrac{12}{2x - 3}$, откуда x может равняться 1, 2 или 3, а y, соответственно, 1, 31 и 29. Осталось подставить найденные пары в неравенство исходной системы и выяснить, при каких a ровно пять натуральных чисел z дают вместе с x и y решения задачи.

Ответ: $\left(\dfrac{5}{11}; \dfrac{6}{13}\right]$.

Список опорных задач

● *НОД* $(a;b) =$ *НОД* $(a; a+b)$

● *НОД* $(a;b) =$ *НОД* $(a; a-b)$

● Если целые числа a и b взаимно просты, то их сумма $a+b$ и произведение ab также являются взаимно простыми числами.

● Если целые числа a и b являются взаимно простыми, то *НОД* $(a+b; a-b)$ равен 1 или 2.

Доказательство. Положим *НОД* $(a+b; a-b) = d$. Тогда $(a+b) \mid d$, $(a-b) \mid d$. Следовательно, сумма и разность чисел $a+b$ и $a-b$, равные соответственно $2a$ и $2b$ делятся на d. Но числа a и b по условию взаимно просты, поэтому 2 делится на d: $2 \mid d$. Отсюда $d = 1$ или $d = 2$. Оба эти случая возможны. Действительно, $d = 1$, если числа a и b разной четности, и $d = 2$, если они нечетны.

● Любые два последовательных натуральных числа взаимно просты.

● Наибольший общий делитель любых двух последовательных четных натуральных чисел равен 2.

● Любые два последовательных нечетных натуральных числа взаимно просты.

● Если целые числа a и b являются взаимно простыми, то *НОД* $(a+b; a^2 - ab + b^2)$ равен 1 или 3.

● Если натуральные числа m и n взаимно просты, то *НОД* $(m+n; m^2+n^2)$ равен 1 или 2.

Доказательство. Пусть d – общий делитель чисел $m+n$ и m^2+n^2. Тогда на d делится также число $(m+n)^2$, а значит, и число

$(m+n)^2 - (m^2+n^2) = 2mn.$

Итак, d является общим делителем чисел $m+n$ и $2mn$. Но $m+n$ и m не могут иметь общих делителей, отличных от 1 (так как m и n взаимно просты), и тоже справедливо для чисел $m+n$ и n. Следовательно, d является делителем числа 2, т.е. $d=1$ или $d=2$.

***

● Квадрат любого натурального числа или делится на 2 (на 4), когда само число чётное, или при делении на 2 (на 4) даёт в остатке 1.
● Квадрат любого натурального числа или делится на 3, когда на 3 делится само число, или при делении на 3 даёт в остатке 1.
● Квадрат любого натурального числа или делится на 5, когда на 5 делится само число, или при делении на 5 даёт в остатке 1 или 4.
● Квадрат любого натурального числа или делится на 7, когда на 7 делится само число, или при делении на 7 даёт в остатке 1, 2 или 4.
● Разность квадратов двух целых чисел одинаковой чётности делится на 4.

***

● Число 4^n при делении на 3 дает в остатке 1.
Действительно,
$4^n=(3+1)^n=3^n+3^{n-1}+...+3+1=3t+1$,
где $n, t \in N$.
● Число 5^{2n} при делении на 3 дает в остатке 1, а 5^{2n+1} дает в остатке 2.
Действительно,
$5^{2n}=25^n=(24+1)^n=24p+1=3t+1$,
$5^{2n+1}=5(3p+1)=15p+3+2=3t+1$, где $n, p, t \in N$.

***

● При делении на 3 куб целого числа и само число дают одинаковые остатки (0, 1, 2).
● При делении на 9 куб целого числа дает в остатке 0, 1, 8.
● При делении на 4 куб целого числа дает в остатке 0, 1, 3.

***

● Число N^5 оканчивается на ту же цифру, что и число N.

Источники

1. ЕГЭ. Математика. Тематическая тетрадь. 11 класс / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров. – М.: МЦНМО, Издательство «Экзамен», 2010.
2. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.
3. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.
4. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.
5. Панферов В. С., Сергеев И. Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Ителлект-Центр, 2010.
6. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика /авт.-сост. И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др.; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).
7. Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.
8. Журнал «Квант»
9. Журнал «Математика в школе»
10. Бардушкин В.Н., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А., Фадеичева Т.П. Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах. Факультативный курс. – М.: МГИЭТ (ТУ), 2003.
11. Галкин В.Я., Сычугов Д.Ю., Хорошилова Е.В. Конкурсные задачи, основанные на теории чисел. – М., факультет ВМиК МГУ, 2002.
12. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады: Кн. Для учащихся / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1986.
13. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для учащихся 7—11 кл. — Челябинск: Взгляд, 2005. — 271 с. — (Нестандартные задачи по математике).
14. Московские математические регаты / Сост. А.Д. Блинков, Е. С. Горская, В.М. Гуровиц. – М.: МЦНМО, 2007.

15. Пукас Ю. Так сколько же детей можно перевезти из летнего лагеря? // Еженедельная учебно-методическая газета «Математика» (приложение к «Первое сентября», №8, 2010, – стр. 15-16.
16. Саржевский В. И. Применение теории делимости к решению неопределенных уравнений в целых числах. (Лицей информационных технологий № 1537)
17. Сивашинский И. Х. Задачи по математике для внеклассных занятий (9-10 классы). М., «Просвещение», 1968.
18. Фалин Г.И. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 367 с.
19. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989.
20. www.mathege.ru - Математика ЕГЭ 2010 (открытый банк заданий)
21. www.alexlarin.narod.ru - сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.
22. www.shevkin.ru – Задания С6 из ЕГЭ 2010 по математике.
23. www.fdp.fa.ru – Финакадемия. Факультет довузовской подготовки.