Департамент образования города Москвы
Совет ректоров высших учебных заведений Москвы и Московской обл.
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXII

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Издательство МЦНМО
Москва, 2009

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу

119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11,
Московская математическая олимпиада,

по адресу электронной почты mmo@mccme.ru
или по телефону (499) 241—12—37.

☞ Материалы данной книги размещены на странице

http://www.mccme.ru/olympiads/mmo/

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

Все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.) размещены на сайте

http://www.problems.ru

☞ Председатель оргкомитета LXXII ММО

профессор механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова *А. В. Булинский*

☞ Сборник подготовили:

В. Б. Алексеев, В. Д. Арнольд, А. В. Бегунц, М. А. Берштейн, А. Д. Блинков, П. А. Бородин, А. И. Галочкин, Т. И. Голенищева-Кутузова, Н. Б. Гончарук, П. С. Дергач, С. А. Дориченко, А. И. Ефимов, О. М. Заплетина, А. А. Заславский, А. Я. Канель-Белов, А. Л. Канунников, Т. В. Караваева, В. А. Клепцын, О. Н. Косухин, Ю. Г. Кудряшов, Н. А. Кулакова, С. К. Ландо, С. В. Маркелов, Г. А. Мерзон, М. В. Мурашкин, И. В. Нетай, Н. М. Нетрусова, И. И. Осипов, В. С. Панфёров, А. Ю. Перепечко, В. В. Произволов, М. А. Раскин, И. В. Раскина, И. Н. Сергеев, А. Б. Скопенков, А. С. Трепалин, В. Г. Ушаков, Б. Р. Френкин, А. В. Хачатурян, А. С. Чеботарёв, И. А. Шанин, А. В. Шаповалов, В. З. Шарич, И. А. Шейпак, Д. Э. Шноль, Д. Е. Щербаков, И. В. Ященко, М. И. Ященко.

☞ Рисунки выполнили: *В. Ю. Радионов, Д. Е. Щербаков.*

☞ Проведение олимпиады и издание осуществлены при поддержке фирмы «НИКС», компании «Яндекс» и фонда «Математические этюды».

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. У 2009 года есть такое свойство: меняя местами цифры числа 2009, нельзя получить меньшее четырёхзначное число (с нуля числа не начинаются). В каком году это свойство впервые повторится снова?

(*И. В. Раскина*)

2. Разрежьте фигуру на рис. 1 на 8 одинаковых частей. (*Фольклор*)

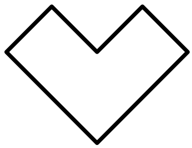


Рис. 1

3. В парке росли липы и клёны. Клёнов среди них было 60%. Весной в парке посадили липы, после чего клёнов стало 20%. А осенью посадили клёны, и клёнов стало снова 60%. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год?

(*Д. Э. Шноль*)

4. Если у осьминога чётное число ног, он всегда говорит правду. Если нечётное, то он всегда лжёт. Однажды зелёный осьминог сказал тёмно-синему:

— У меня 8 ног. А у тебя только 6.

— Это у меня 8 ног, — обиделся тёмно-синий. — А у тебя всего 7.

— У тёмно-синего действительно 8 ног, — поддержал фиолетовый и похвастался: — А вот у меня целых 9!

— Ни у кого из вас не 8 ног, — вступил в разговор полосатый осьминог. — Только у меня 8 ног!

У кого из осьминогов было ровно 8 ног? (*И. В. Раскина*)

5. Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане, рис. 2) до своего отеля (точка B). Турист хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрёстке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет. (*И. В. Ященко*)

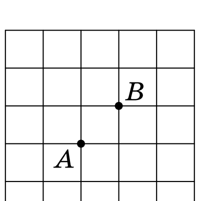


Рис. 2

6. а) Скупой рыцарь хранит золотые монеты в шести сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну в эти два сундука. Ещё он заметил, что если открыть любые 3, 4 или 5 сундуков, то тоже можно переложить лежащие в них монеты таким образом, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга так и не узнал, можно ли разложить все монеты поровну по всем шести сундукам. Можно ли, не заглядывая в заветные сундуки, дать точный ответ на этот вопрос?

б) А если сундуков было восемь, а Скупой рыцарь мог разложить поровну монеты, лежащие в любых 2, 3, 4, 5, 6 или 7 сундуках? (*И. В. Раскина*)

7 класс

1. Петя и Вася живут в соседних домах (см. план на рисунке 3). Вася живёт в четвёртом подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи кратчайшим путём (не обязательно идущим по сторонам клеток), безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живёт Петя. (*А. В. Хачатурян*)

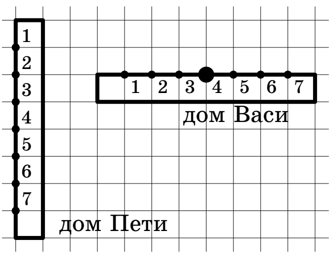


Рис. 3

2. На каждом из двух огородов Дед посадил по одинаковому количеству репок. Если в огород заходит Внучка, то она выдёргивает ровно $1/3$ репок, имеющихся к этому моменту. Если заходит Жучка, то она выдёргивает $1/7$ репок, а если заходит Мышка, то она выдёргивает только $1/12$ репок. К концу недели на первом огороде осталось 7 репок, а на втором — 4. Заходила ли Жучка во второй огород?

(*Т. И. Голенищева-Кутузова, М. И. Ященко*)

3. У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зелёный:

«Вместе у нас 27 ног», жёлтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?

(*Д. Э. Шноль*)

4. Скупой рыцарь хранит золотые монеты в 77 сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну по этим двум сундукам. Потом он заметил, что если открыть любые 3, или любые 4, ..., или любые 76 сундуков, то тоже можно так переложить лежащие в них монеты, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга не успел проверить, можно ли разложить все монеты поровну по всем 77 сундукам. Можно ли, не заглядывая в сундуки, дать точный ответ на этот вопрос? (*И. В. Раскина*)

5. Начертите два четырёхугольника с вершинами в узлах сетки, из которых можно сложить а) как треугольник, так и пятиугольник; б) и треугольник, и четырёхугольник, и пятиугольник. Покажите, как это можно сделать.

(*Д. Э. Шноль*)

6. Используя в качестве чисел любое количество монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей, а также (бесплатные) скобки и знаки четырёх арифметических действий, составьте выражение со значением 2009, потратив как можно меньше денег. (*И. В. Ященко*)

8 класс

1. На доске написано:

В этом предложении ...% цифр делятся на 2, ...% цифр делятся на 3, а ...% цифр делятся и на 2, и на 3.

Вставьте вместо многоточий какие-нибудь целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным.

(*А. В. Шаповалов*)

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K, для которой $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в её середине. Найдите углы треугольника ABC. (*И. И. Богданов*)

3. Известно, что квадратные уравнения $ax^2+bx+c=0$ и $bx^2+cx+a=0$ (a, b и c — отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его. (*В. А. Клепцын*)

4. В каждой клетке квадрата 101×101, кроме центральной, стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Машинка въезжает извне в произвольную клетку на границе квадрата, после чего ездит параллельно сторонам клеток, придерживаясь двух правил:

1) в клетке со знаком «прямо» она продолжает путь в том же направлении;

2) в клетке со знаком «поворот» она поворачивает на 90° (в любую сторону по своему выбору).

Центральную клетку квадрата занимает дом. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности врезаться в дом? (*А. С. Чеботарёв*)

5. Две точки на плоскости несложно соединить тремя ломаными так, чтобы получилось два равных многоугольника (например, как на рис. 4). Соедините две точки четырьмя ломаными так, чтобы все три получившихся многоугольника были равны. (Ломаные несамопересекающиеся и не имеют общих точек, кроме концов.) (*С. В. Маркелов*)

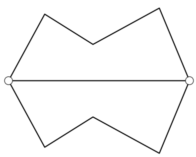


Рис. 4

6. Двое играющих по очереди пишут — каждый на своей половине доски — по одному натуральному числу (повторения разрешаются) так, чтобы сумма всех чисел на доске не превосходила 10000. После того, как сумма всех *чисел* на доске становится равной 10000, игра заканчивается подсчётом суммы всех *цифр* на каждой половине. Выигрывает тот, на чьей половине сумма цифр меньше (при равных суммах — ничья). Может ли кто-нибудь из игроков выиграть, как бы ни играл противник? (*А. В. Шаповалов*)

9 класс

1. После урока на доске остался график функции $y=\frac{k}{x}$ и пять прямых, параллельных прямой $y=kx$ $(k\neq0)$.

Найдите произведение абсцисс всех десяти точек пересечения. (*А. Д. Блинков*)

2. Докажите, что существует многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую — в отношении $2:1$. (*С. В. Маркелов*)

3. В каждой клетке квадрата 101×101 стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Машинка может въехать извне в любую клетку на границе квадрата (под прямым углом к границе). Если машинка попадает в клетку со знаком «прямо», то она продолжает ехать в том же направлении, что и ехала. Если попадает в клетку со знаком «поворот», то поворачивает на 90° в любую сторону по своему выбору. В центральной клетке квадрата спрятаны сокровища. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности попасть в центральную клетку?

(*А. С. Чеботарёв*)

4. Назовём последовательность натуральных чисел *интересной*, если каждый её член, кроме первого, является либо средним арифметическим, либо средним геометрическим двух соседних с ним членов. Сеня начал последовательность с трёх натуральных чисел, образующих возрастающую геометрическую прогрессию. Он хотел бы продолжить свою последовательность до бесконечной интересной последовательности, которая ни с какого момента не становится ни арифметической, ни геометрической прогрессией. Может ли оказаться, что этого нельзя сделать?

(*По мотивам А. Ю. Перепечко*)

5. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120°. Из вершины B выпустили внутрь треуголь-

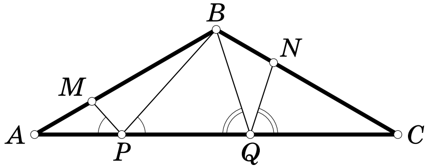


Рис. 5

ника два луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны в точки M и N (рис. 5). Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ. (*В. В. Произволов*)

6. Дано целое число $n > 1$. Двое игроков по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй — синим (отмечать одну и ту же точку дважды нельзя). Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. После этого каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. Игрок, у которого найденная длина больше, выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Может ли один из игроков обеспечить себе победу?

(*А. В. Шаповалов*)

10 класс

1. Через терминал оплаты на мобильный телефон можно перевести деньги, при этом взимается комиссия — целое положительное число процентов. Федя положил целое количество рублей на мобильный телефон, и его счёт пополнился на 847 рублей. Сколько денег положил на счёт Федя, если известно, что комиссия менее 30%? (*А. В. Акопян*)

2. Дана возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ такая, что каждый её член является либо средним арифметическим, либо средним геометрическим двух соседних. Обязательно ли с некоторого момента эта последовательность становится либо арифметической, либо геометрической прогрессией?

(*А. Ю. Перепечко*)

3. Квадрат разрезали на конечное число прямоугольников. Обязательно ли найдётся отрезок, соединяющий центры (точки пересечения диагоналей) двух прямоугольников, не имеющий общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух? (*М. В. Мурашкин*)

4. На кольцо свободно нанизано 2009 бусинок. За один ход любую бусинку можно передвинуть так, чтобы она оказалась ровно посередине между двумя соседними. Существуют ли такие изначальная расстановка бусинок и последовательность ходов, при которых какая-то бусинка пройдёт хотя бы один полный круг? (*И. А. Шанин*)

5. Стороны BC и AC треугольника ABC касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках A_1, B_1. Пусть A_2, B_2 — ортоцентры треугольников CAA_1 и CBB_1. Докажите, что прямая A_2B_2 перпендикулярна биссектрисе угла C. (*А. А. Заславский*)

6. Докажите, что при любых натуральных $0<k<m<n$ числа C_n^k и C_n^m не взаимно просты. ($C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число способов выбрать k элементов из n различных элементов без учёта порядка.) (*Фольклор*)

11 класс

1. Когда из бассейна сливают воду, уровень h воды в нём меняется в зависимости от времени t по закону

$$h(t)=at^2+bt+c,$$

а в момент t_0 окончания слива выполнены равенства $h(t_0)=h'(t_0)=0$. За сколько часов вода из бассейна сливается полностью, если за первый час уровень воды в нём уменьшается вдвое? (*И. Н. Сергеев*)

2. Моток ниток проткнули насквозь 72 цилиндрическими спицами радиуса 1 каждая, в результате чего он приобрёл форму цилиндра радиуса 6. Могла ли высота этого цилиндра оказаться также равной 6? (*О. Н. Косухин, И. Н. Сергеев*)

3. На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом и график функции

$$y=\sin x,\quad x\in(0;\alpha).$$

Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной его точке, если:

а) $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$; б) $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$? (*А. И. Галочкин*)

4. Через каждую вершину четырёхугольника проведена прямая, проходящая через центр вписанной в него окружности. Три из этих прямых обладают тем свойством, что каждая из них делит площадь четырёхугольника на две равновеликие части.

а) Докажите, что и четвёртая прямая обладает тем же свойством.

б) Какие значения могут принимать углы этого четырёхугольника, если один из них равен 72°? (*А. Л. Канунников*)

5. Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.

(*А. Л. Канунников*)

6. Докажите, что при любом разбиении ста «двузначных» чисел 00, 01, ..., 99 на две группы некоторые числа хотя бы одной группы можно записать в ряд так, чтобы любые два соседних числа этого ряда отличались друг от друга на 1, 10 или 11, и хотя бы в одном из двух разрядов (единиц или десятков) встречались все 10 различных цифр.

(*О. Н. Косухин*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. Ответ: в 2022 году.

В 2010, 2011, ..., 2019 годах и в 2021 году в номере года есть единица, и если её поставить на первое место, число заведомо уменьшится. Число 2020 можно уменьшить до 2002. А вот число 2022 нельзя уменьшить, переставляя цифры.

2. Разрезать фигуру можно несколькими способами. Два способа приведены на рисунке 6.

3. Ответ: в 6 раз.

Первое решение. До начала посадок липы составляли 2/5, а клёны — 3/5 всех деревьев в парке. К лету число

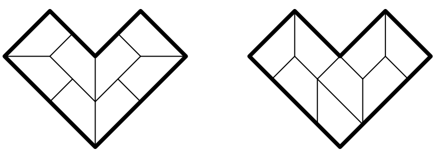


Рис. 6

клёнов не изменилось, однако они стали составлять 1/5 всех деревьев. Следовательно, количество всех деревьев в парке увеличилось втрое. При этом липы составляли 4/5 всех деревьев.

К зиме не изменилось количество лип, но они стали составлять 2/5 всех деревьев. Следовательно, количество всех деревьев увеличилось ещё вдвое. Таким образом, за год количество деревьев увеличилось в 6 раз.

Второе решение. Сначала лип было в 1,5 раза меньше, чем клёнов, а потом стало в 4 раза больше. При этом количество клёнов не менялось. Значит, лип стало в $1{,}5 \cdot 4 = 6$ раз больше. Заметим, что к концу года отношение числа клёнов к числу лип стало таким же, как было в начале.

Поскольку осенью количество лип не менялось, количество клёнов тоже увеличилось в шесть раз. То есть число деревьев в парке увеличилось в шесть раз.

4. Ответ: 8 ног было у полосатого осьминога.

Если фиолетовый осьминог говорит правду, то у него чётное число ног. Но в таком случае он не может сказать, что у него 9 ног. Значит, фиолетовый осьминог лжёт. Поэтому у тёмно-синего осьминога не 8 ног. Но тёмно-синий говорит, что у него 8 ног, то есть лжёт. Поэтому у него нечётное число ног. Сказав, что у тёмно-синего осьминога 6 ног, зелёный солгал. Поэтому он солгал и в первый раз, и у него не 8 ног. Итак, первое утверждение полосатого осьминога верно. Значит, верно и второе, и у него действительно 8 ног. А у остальных осьминогов нечётное число ног.

5. Один из возможных маршрутов туриста изображён на рисунке 7. Двигаясь по этому пути, турист пройдёт 34 улицы (улицей мы называем отрезок между двумя соседними перекрёстками). Докажем, что более длинный маршрут невозможен.

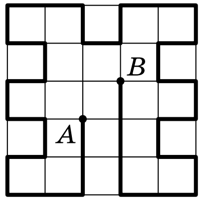


Рис. 7

Всего в Старом городе 36 перекрёстков. Всякий раз, когда турист проходит очередную улицу, он попадает на новый перекрёсток. Таким образом, больше чем 35 улиц

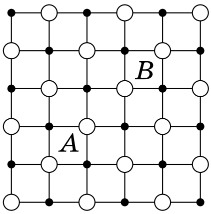


Рис. 8

турист пройти не сможет (начальный перекрёсток A не считается). Покажем, что посетить 35 перекрёстков (и, следовательно, пройти 35 улиц) любознательный турист тоже не сможет. Для этого раскрасим перекрёстки в чёрный и белый цвета в шахматном порядке (рис. 8). Всякий раз, проходя улицу, турист попадает на перекрёсток другого цвета. И отель, и вокзал расположены на белых перекрёстках. Поэтому любой маршрут содержит чётное число улиц, а число 35 нечётно.

6. Ответ: а) можно; б) нельзя.

а) Первое решение. Разделим сундуки на три пары. Общее количество монет в каждой паре сундуков чётно, поэтому чётно и число монет во всех шести сундуках. Теперь разделим сундуки на две тройки. Число монет в каждой тройке кратно трём, поэтому кратно трём и общее число монет во всех сундуках. Итак, это общее число монет делится на 2 и 3, а значит, и на 6 (так как 2 и 3 взаимно просты). Следовательно, все монеты можно разложить поровну по 6 сундукам.

Второе решение. Для начала заметим, что число монет во всех сундуках имеет одинаковую чётность. Ведь поделить поровну содержимое двух сундуков с разной чётностью монет нельзя.

Затем обратим внимание на то, что общее количество монет в первых трёх сундуках кратно трём. Если заменить сундук № 3 на сундук № 4, то делимость на 3 не нарушится. Это означает, что число монет в четвёртом сундуке даёт тот же остаток при делении на 3, что и в третьем. Таким же образом про любые два сундука можно доказать, что число монет в одном даёт тот же остаток при делении на 3, что и в другом. Поэтому остатки от деления всех этих чисел на 3 одинаковы.

Если числа дают одинаковые остатки при делении как на 2, так и на 3, то их разность делится на 2 и на 3, то есть делится и на 6. Это означает, что у любых двух (а значит, и у всех шести) чисел остатки при делении на 6 равны между собой. Сумма шести таких чисел будет кратна 6. Поэтому все монеты можно разложить поровну по всем сундукам.

б) Рассуждая так же, как в пункте а), можно доказать, что все восемь чисел, соответствующие количествам монет в сундуках, дают одинаковые остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Значит, эти числа дают одинаковые остатки при делении на 420 (420 — это наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, 5, 6 и 7). Но поскольку 420 не кратно 8, эти числа могут иметь различные остатки при делении на 8, что помешает поровну разложить монеты по восьми сундукам.

Например, в первом сундуке могла быть 421 монета, а в остальных семи — по одной. Тогда в двух сундуках в сумме либо 2, либо 422 монеты, оба числа чётные. В трёх сундуках в сумме либо 3, либо 423 монеты, каждое из этих чисел делится на 3 и т. д. В семи сундуках в сумме 7 или 427 монет. Оба числа делятся на 7. Однако общее число монет 428 на 8 не делится. То есть в этом случае на восемь сундуков разложить монеты поровну не получится.

С другой стороны, во всех сундуках изначально могло храниться, например, поровну монет. Поэтому точно ответить на вопрос, не зная, что лежит в сундуках, нельзя.

7 класс

1. О т в е т: в шестом подъезде.

Кратчайший путь от точки A до Васиного подъезда — отрезок AD (рис. 9). Кратчайший путь от точки B до Васиного подъезда — это путь по отрезку BC, а далее — по отрезку CD.

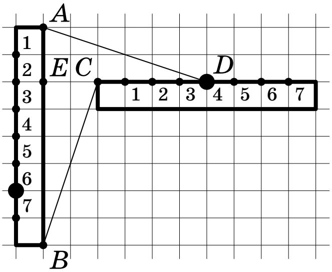


Рис. 9

Так как треугольники AED и CEB равны, $AD=BC$. Поэтому пути от точек A и B до Васиного подъезда отличаются на 4 клетки.

Так как пути от Петиного подъезда через «верхний» угол (т. е. через точку A) и через «нижний» угол (т. е. через точку B) равны, путь от Петиного подъезда до точки A должен быть длиннее на 4 клетки, чем путь до точки B. Значит, Петя живёт в шестом подъезде.

2. Ответ: да, заходила.

Первое решение. Каждый раз после того, как в огород заходит Внучка, на нём остаётся $2/3$ имевшихся до того репок, после визита Жучки — $6/7$, а после визита Мышки — $11/12$. Поэтому количество репок на огороде не может стать кратным 7 после визита ни одного из этих персонажей, а перестать делиться на 7 может только после визита Жучки. Так как в конце недели количество репок на первом огороде делится на 7, исходное количество репок на этом огороде тоже делилось на 7.

Вначале на втором огороде было столько же репок, сколько на первом, а в конце осталось 4. Поэтому в какой-то момент число репок там перестало делиться на 7. Значит, Жучка заходила во второй огород.

Второе решение. Так как во втором огороде меньше репок, туда кто-то заходил. Подумаем, кто туда заходил последним. Если это была Мышка, то до её визита на огороде было $4:\frac{11}{12}=4\frac{4}{11}$ репки. Если это была Жучка, то до её визита на огороде было $4:\frac{6}{7}=4\frac{2}{3}$ репки. Так как число репок всегда целое, это могла быть только Внучка, и до её прихода на огороде было $4:\frac{2}{3}=6$ репок.

Число репок до посещения Внучки меньше 7, значит, до этого в огород кто-то заходил. Аналогично предыдущему можно убедиться, что это могла быть только Жучка (и до её прихода на огороде было $6:\frac{6}{7}=7$ репок).

Комментарий. Так как огород с 7 репками не мог получиться после визита одного из персонажей, больше в огород никто не заходил. То есть Дед посадил на каждом огороде по 7 репок.

3. Ответ: у зелёного осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног.

Так как осьминоги противоречат друг другу, то возможны два случая: либо все осьминоги лгут, либо ровно один из них говорит правду.

Если все осьминоги лгут, то у каждого из них по 7 ног. Значит, вместе у них 28 ног. Но тогда синий осьминог сказал правду — противоречие.

Если же три осьминога солгали, а четвёртый сказал правду, то у солгавших осьминогов должно быть по 7 ног, а у сказавшего правду — либо 6, либо 8. Поэтому вместе у них либо 27, либо 29 ног, то есть правду сказал зелёный осьминог.

Таким образом, у зелёного осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног.

4. Ответ: да, все монеты можно разложить поровну по всем сундукам.

Разделим сундуки на 11 групп по 7 сундуков в каждой. Общее количество монет в каждой группе сундуков должно делиться на 7, значит, на 7 делится и общее число монет во всех 77 сундуках.

Теперь разделим сундуки на 7 групп по 11 сундуков. Теперь число монет в каждой группе делится на 11, значит, общее число монет делится на 11.

Итак, общее число монет делится на простые числа 7 и 11, а значит, делится и на их произведение 77. Следовательно, все монеты можно разложить поровну по 77 сундукам.

См. также задачу 6 для 6 класса.

5. Один из возможных примеров показан на рис. 10.

6. Ответ: число 2009 можно получить за 23 рубля следующим способом:

$$2009=(2\cdot(2+1)+1)(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot(2+1)\cdot(2+1)-1).$$

Объясним, как эту задачу можно было бы решать. Заметим, что выражение можно составлять из произвольных чисел, заменив каждое из них на сумму соответствующего

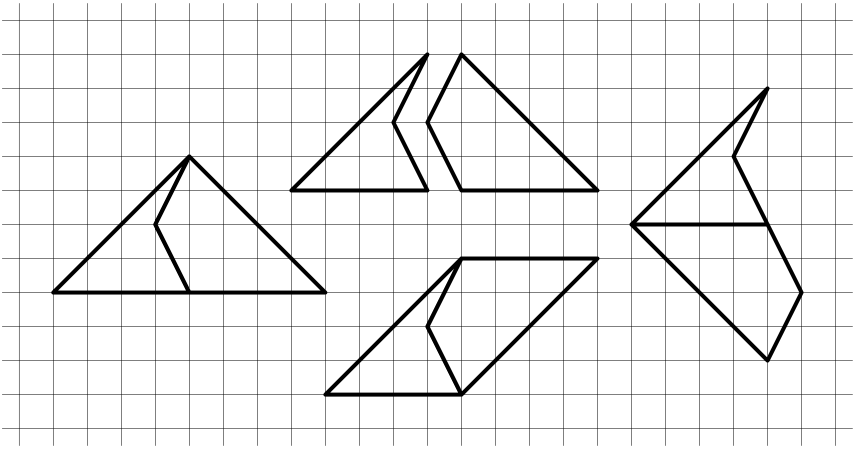


Рис. 10

числа единиц. В частности, 2009 можно получить как сумму 2009 единиц.

Но так как произведение обычно больше суммы, выгоднее числа не складывать, а умножать. Если разложить 2009 на простые множители, получится выражение $7\cdot 7\cdot 41$ стоимостью $7+7+41=55$ рублей.

Теперь можно попробовать получить более дешёвым способом эти сомножители. Ясно, что если число стоит рядом с дешёвым, то и само оно не слишком дорогое. Например, 41 стоит рядом с числом $40=5\cdot 2\cdot 2\cdot 2$. Поэтому 41 можно получить за 12 рублей: $5\cdot 2\cdot 2\cdot 2+1$. Аналогично $7=2\cdot 3+1$. Воспользовавшись этим, можно получить 2009 за 24 рубля: $(2\cdot 3+1)(2\cdot 3+1)(5\cdot 2\cdot 2\cdot 2+1)$.

Можно попробовать удешевить один из сомножителей по-другому: например, представить 41 как $42-1=2\cdot 3\cdot 7-{}$ $-1=2\cdot 3\cdot(2\cdot 3+1)-1$. Снова получилось 12 рублей.

Итак, дальше удешевлять отдельные сомножители так не получается, но можно попробовать применить ту же идею для каких-то их произведений. Например, можно представить $7\cdot 7=49$ как $48+1=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3+1$ или $50-1=5\cdot 5\cdot 2-1$. К сожалению, это не позволяет улучшить результат (24 рубля). Зато если представить $7\cdot 41=287$ как $288-1=2\cdot 2\cdot 2\times$

$\times 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3-1$, то получится выражение для 2009 всего за 23 рубля: $2009=(2\cdot 3+1)(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3-1)$.

Этот результат наилучший. Однако жюри неизвестно доказательство этого, не использующее компьютерного перебора.

Комментарии. 1. Докажем, что 2009 нельзя получить за 20 рублей, используя только операции сложения и умножения. Для этого докажем, что за 20 рублей нельзя получить больше, чем $3^6\cdot 2=1458<2009$. Рассмотрим выражение ценой 20 рублей с наибольшим значением. Во-первых, ясно, что в этом выражении нет умножения на 1. Во-вторых, это выражение представляет собой произведение некоторых натуральных чисел. Действительно, фрагмент вида $a+b\cdot c$ можно заменить на $(a+b)\cdot c$, сохранив цену, но увеличив значение выражения. В-третьих, каждый сомножитель меньше 5. Действительно, $5+a$ можно заменить на $2\cdot 3+a$, сохранив цену, но увеличив значение выражения. Наконец, все четвёрки можно заменить на $2\cdot 2$. Значит, выражение является произведением нескольких двоек и троек с суммой 20. Так как $3\cdot 3>2\cdot 2\cdot 2$ (то есть три двойки выгодно заменить на две тройки), из таких выражений максимальное значение имеет $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 2=1458$.

2. У нас получилось, что оптимальный пример состоит из произведения двоек и троек. Это связно с тем, что 2 и 3 — ближайшие целые числа к постоянной Эйлера $e=2{,}718\ldots$

8 класс

1. Ответ: «В этом предложении 70 % цифр делятся на 2, 60 % цифр делятся на 3, а 40 % цифр делятся и на 2, и на 3» или «В этом предложении 80 % цифр делятся на 2, 60 % цифр делятся на 3, а 40 % цифр делятся и на 2, и на 3».

Комментарии. 1. Можно показать, что других решений задача не имеет.

2. Объясним, как можно было такой ответ искать. Всего в обсуждаемом предложении не более $3\cdot 2+4=10$ цифр. Поэтому каждое пропущенное число двузначно. Т. е. всего цифр в предложении ровно десять, а значит, все пропущенные числа заканчиваются на 0. Значит, в предложении содержатся 3 нуля. Каждый из этих трёх нулей делится и на 2, и на 3, поэтому все пропущенные числа не меньше 30. Учитывая, что в предложении уже имеются

две двойки и две тройки, получаем, что первые два числа лежат между 50 и 80, а третье — между 30 и 60.

Дальше уже не так сложно найти ответ перебором. Но можно воспользоваться методом последовательных исправлений. Начнём с утверждения

В этом предложении 50 % *цифр делятся на* 2*,* 50 % *цифр делятся на* 3*, а* 30 % *цифр делятся и на* 2*, и на* 3*.*

Оно неверно, так как цифр, делящихся на 3, в нём не 50%, а 60%. Внесём это исправление. Получается (снова неверное) утверждение

В этом предложении 50 % *цифр делятся на* 2*,* 60 % *цифр делятся на* 3*, а* 30 % *цифр делятся и на* 2*, и на* 3*.*

После следующего исправления имеем

В этом предложении 60 % *цифр делятся на* 2*,* 70 % *цифр делятся на* 3*, а* 40 % *цифр делятся и на* 2*, и на* 3*.*

Наконец, ещё одно исправление даёт верный ответ:

В этом предложении 80 % *цифр делятся на* 2*,* 60 % *цифр делятся на* 3*, а* 40 % *цифр делятся и на* 2*, и на* 3*.*

2. О т в е т: $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 54^\circ$.

Обозначим точку пересечения отрезков CK и AL за O (рис. 11). Заметим, что CO — медиана к гипотенузе пря-

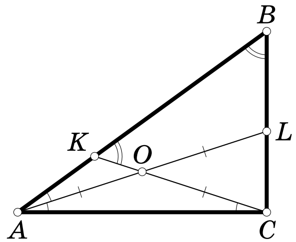


Рис. 11

моугольного треугольника ACL. Значит, $AO = OC = OL$, а $\angle OCA = \angle OAC = \angle OAK$ (последнее равенство верно, так как AO — биссектриса). Обозначим этот угол за α. Тогда $\angle A = 2\alpha$.

Найдём $\angle B$. Так как треугольник CBK равнобедренный, этот угол равен внешнему углу CKB треугольника CKA, то есть $\angle B = \angle ACK + \angle KAC = 3\alpha$.

Наконец, из того, что $\angle B+\angle A=90^\circ$, получаем, что $2\alpha+$ $+3\alpha=90^\circ$. Значит, $\alpha=18^\circ$. Соответственно, $\angle B=3\cdot 18^\circ=54^\circ$, а $\angle A=2\cdot 18^\circ=36^\circ$.

3. Ответ: 1.

Первое решение. Домножим первое уравнение на x и вычтем из него второе. Ясно, что общий корень исходных уравнений будет и корнем получившегося уравнения

$$(ax^3+bx^2+cx)-(bx^2+cx+a)=0 \Leftrightarrow a(x^3-1)=0.$$

Но у последнего уравнения только один корень — а именно, 1.

Второе решение. Можно решить задачу и «в лоб». Найдём сначала, при каких x значения обоих квадратных трёхчленов равны, — для этого нужно решить уравнение

$$ax^2+bx+c=bx^2+cx+a,$$

т. е.

$$(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0.$$

Можно решить его по формуле, но проще заметить, что 1 — его корень (что и не удивительно — оба трёхчлена принимают при $x=1$ значение $a+b+c$), а второй корень (при $a\neq b$) по теореме Виета равен $\frac{c-a}{a-b}$.

Нетрудно привести пример, когда $x=1$ действительно является общим корнем наших трёхчленов, — нужно взять любые a, b, c с нулевой суммой. Проверим, может ли быть общим корнем $x=\frac{c-a}{a-b}$. Подставляя его в первое уравнение, получаем, что для этого $a(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ должно обратиться в ноль. Но

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$$

может обратиться в ноль только при $a=b=c$, а в этом случае у наших уравнений нет общих корней.

4. Ответ: как бы ни были расставлены знаки, машинка может врезаться в дом.

Первое решение. Заметим, что если машинка может проехать из клетки A в клетку B, то она может проехать из клетки B в клетку A — проезжая тот же маршрут в обратном порядке. Поэтому достаточно доказать, что, выезжая из дома, машинка может выехать за границу квадрата.

В самом деле, пусть машинка выезжает из центральной клетки на север. В каждой следующей клетке она сможет ехать на север или на запад, никогда не двигаясь на юг и на восток. Тогда не позднее, чем через 101 шаг, она заведомо выйдет за границы квадрата.

В т о р о е   р е ш е н и е. Если машинка въезжает в правый нижний угол, то какой бы знак там ни стоял, она может проехать как вверх, так и налево (рис. 12). Поэтому правый

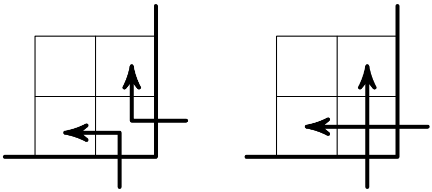


Рис. 12

нижний угол можно выкинуть и считать, что машинка сразу въезжает (в произвольном направлении) в оставшуюся часть (рис. 13).

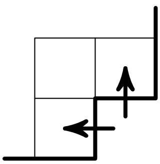


Рис. 13

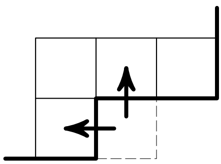


Рис. 14

Но теперь справа внизу появилась новая угловая клетка, которую можно выкинуть аналогичным образом (рис. 14). Повторяя такое рассуждение, каждый раз можно выкидывать из доски клетку, правее и ниже которой ничего нет, пока центральная клетка не станет доступна извне.

5. Один из возможных примеров изображён на рисунке 15. В нём верхние два многоугольника совмещаются

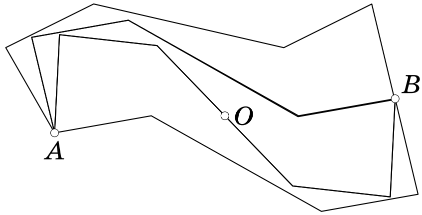


Рис. 15

поворотом относительно точки A, нижние два — симметрией относительно точки O.

Комментарии. 1. Аналогичным образом можно соединить две точки и пятью ломаными так, чтобы все возникающие многоугольники были равны. Оказывается, однако, что соединить две точки шестью ломаными так, чтобы все возникающие многоугольники были равны, невозможно.

2. Интересно, что многоугольниками такого вида можно замостить плоскость, причём непериодическим образом (рис. 16).

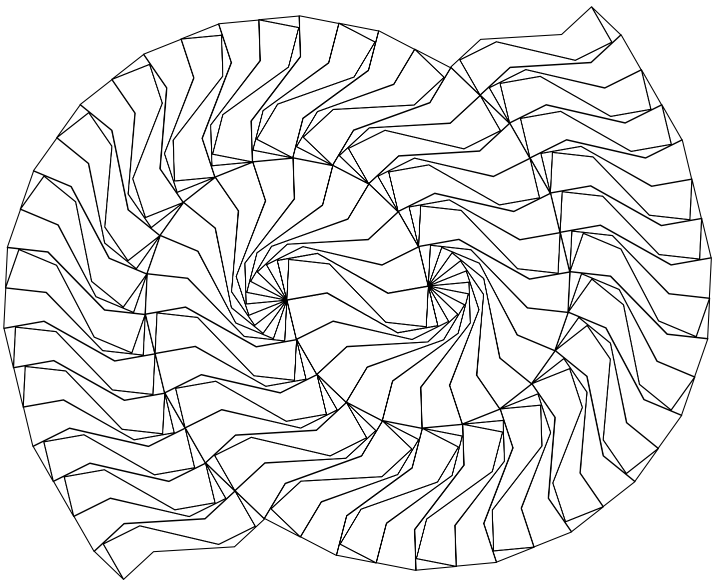


Рис. 16

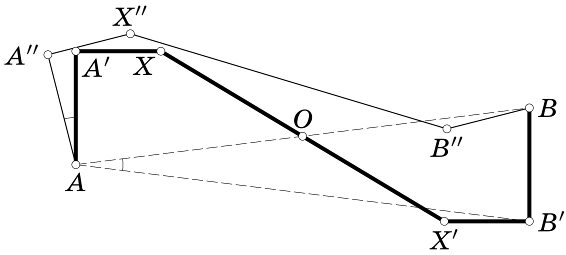


Рис. 17

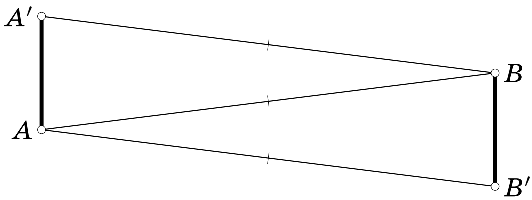


Рис. 18

3. При взгляде на рис. 15 может остаться неясным, почему такая конфигурация вообще возможна. Поясним это.

Заметим, что нам достаточно построить такой девятиугольник $AA'XX'B'BA''X''B''$, что

(1) ломаная $AA'XX'B'$ переходит при повороте относительно точки A в ломаную $AA''X''B''B$ (рис. 17);

(2) ломаная $AA'XX'B'B$ центрально симметрична.

Рассмотрим произвольный параллелограмм $AA'BB'$, диагональ которого равна стороне (рис. 18). В нём вершина B' переходит в вершину B при повороте относительно точки A на угол $B'AB$, поэтому выполнения условия (1) теперь добиться нетрудно: можно взять две точки X и X', после чего взять в качестве A'', X'' и B'' образы A', X и X' при указанном повороте. А чтобы выполнялось условие (2), необходимо и достаточно, чтобы X' был образом X при симметрии относительно середины O отрезка AB.

Осталась только одна проблема: точку X необходимо выбрать так, чтобы в результате построения действительно получился многоугольник — т. е. чтобы ломаная $AA'XX'B'$ не пересекалась с ломаной $AA''X''B''B$, и обе они не пересекались с отрезком BB'.

Заметим, что для первого достаточно, чтобы ломаная $AA'XX'B'$ (а значит, и её образ при повороте $AA''X''B''B$) постоянно удалялась от A. Действительно, тогда каждая окружность с центром в A пересекается с каждой из двух ломаных ровно по одной точке, причём эти точки не могут совпадать, так как они совмещаются поворотом на ненулевой угол. А с отрезком BB' ломаные не пересекутся, если все их точки будут лежать (проектироваться на прямую, перпендикулярную BB') левее этого отрезка.

Всё это можно обеспечить, взяв за X такую точку на перпендикуляре к AA', что угол AXO тупой (чтобы такая точка нашлась, исходный параллелограмм $AA'BB'$ полезно взять достаточно вытянутым — с диагональю AB много длиннее стороны AA').

6. Ответ: второй игрок может выиграть.

Ясно, во-первых, что второй может гарантировать себе ничью: ему достаточно всё время писать числа с суммой цифр 1 (например, просто число 1) — действительно, он делает не больше ходов, чем первый, и на каждом ходе пишет число с не большей суммой цифр. Более того, по той же причине первый игрок проиграет, если хотя бы один раз напишет число с суммой цифр больше 1.

Пусть теперь оба игрока пишут только числа с суммой цифр 1 — т. е. 1, 10, 100, 1000 или 10000. Тогда проиграть второй не может, а чтобы выиграть, ему нужно вынудить противника сделать больше ходов; или, что то же самое, сделать последний ход.

Докажем, что отвечая на числа 10 и 1000 числом 1, а на числа 100 и 1 числом 10, второй игрок добьётся успеха. Действительно, после каждого его хода сумма чисел на доске делится на 11, а 10000 на 11 не делится. Поэтому остаётся лишь проверить, что такой ход всегда легален — т. е. что после него сумма не станет больше 10000. Для этого заметим, что первое большее 10000 число, делящееся на 11, — это 10010, а его нельзя получить, прибавляя 1 или 10 к числу, меньшему 10000.

Комментарий. Можно показать, что если заменить 10000 в условии на произвольное число N, то второй игрок может выиграть тогда и только тогда, когда N даёт нечётный остаток при делении на 11.

9 класс

1. Ответ: -1.

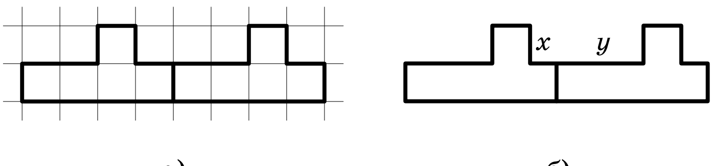
Любая прямая, параллельная прямой $y=kx$, имеет уравнение $y=kx+b$, где b — некоторая константа. Абсциссами точек её пересечения с гиперболой $y=\frac{k}{x}$ являются оба корня уравнения $\frac{k}{x}=kx+b$. Оно равносильно квадратному уравнению $kx^2+bx-k=0$. По теореме Виета произведение корней этого уравнения равно $\frac{-k}{k}=-1$. Перемножив пять таких произведений, получаем ответ.

Комментарии. 1. Каждое из указанных квадратных уравнений имеет два действительных корня, поскольку имеет дискриминант $b^2+4k^2>0$. Геометрически это как раз означает, что любая прямая, параллельная прямой $y=kx$, пересекает гиперболу $y=\frac{k}{x}$ в двух точках.

2. Так же, как в решении, можно доказать более общий факт — произведение абсцисс точек пересечения прямой и гиперболы $y=\frac{k}{x}$ зависит только от k и угла наклона прямой.

2. Существует много примеров таких многоугольников. Приведём несколько.

В примере на рис. 19, *а* равные многоугольники совмещаются параллельным переносом. Этот пример можно



а) *б*)

Рис. 19

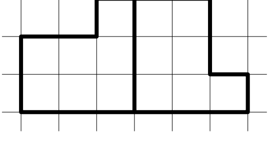


Рис. 20

обобщить до примера, в котором одна из сторон делится пополам, а другая — в произвольном отношении $x:y$. А именно, начнём с прямоугольника, который разделим на два равных и затем добавим сверху по «горбику»

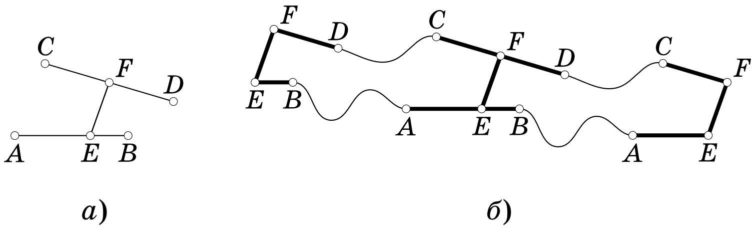


Рис. 21

так, чтобы верхняя сторона делилась в отношении $x:y$ (рис. 19, *б*).

Можно построить пример, где равные многоугольники совмещаются поворотом, как на рис. 20.

Ещё одна идея построения целого класса примеров состоит в следующем. Пусть пример есть, тогда на стыке возникает картинка такого типа (рис. 21, *а*): отрезок AB, разделённый точкой E в отношении $2:1$, и отрезок CD, разделённый точкой F пополам. Значит, искомый многоугольник должен содержать фрагменты контура («выступы»), равные $AEFC$ и $BEFD$. Но что мешает дополнить эти два выступа до многоугольника? Ничего. Размещаем выступы произвольно и дополняем контур до замкнутого, например, как показано на рис. 21, *б*.

Интересно, что существует даже выпуклый четырёхугольник, который можно разрезать на две части таким отрезком. Действительно, если взять квадрат и провести через его центр две взаимно перпендикулярные прямые, делящие его стороны в отношении $1:2$, то они разрежут квадрат на четыре равные части (рис. 22). Рассмотрим одну из двух трапеций, на которые разбивает квадрат такая прямая. Вторая прямая разобьёт эту трапецию на две равные части; при этом сторону квадрата она разделит в отношении $1:2$, а противоположную сторону трапеции — пополам.

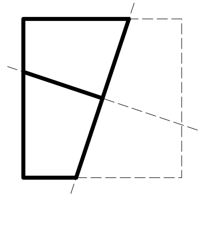


Рис. 22

3. См. решение задачи 4 для 8 класса.

4. О т в е т: последовательность всегда можно продолжить.

Первые три члена a_1, a_2, a_3 образуют возрастающую геометрическую прогрессию и, значит, имеют вид a, aq, aq^2 для некоторого $q>1$. Далее последовательность будем продолжать таким образом, чтобы третий член был средним арифметическим своих соседей, четвёртый — средним геометрическим своих соседей, пятый — средним арифметическим и так далее, чередуя. Легко видеть, что последовательность будет возрастающей.

Докажем, что возникающая последовательность состоит из натуральных чисел. Так как третий член есть среднее арифметическое своих соседей, получаем

$$a_4 = 2a_3 - a_2 = 2aq^2 - aq = aq(2q-1).$$

Ясно, что это число целое (как сумма целых чисел), а так как исходная последовательность была возрастающей — даже натуральное. Далее, так как a_4 — среднее геометрическое своих соседей,

$$a_5 = \frac{a_4^2}{a_3} = \frac{a^2q^2(2q-1)^2}{aq^2} = 4aq^2 - 4aq + a = 4a_3 - 4a_2 + a_1.$$

Так как числа a_1, a_2, a_3 целые, то и a_5 — тоже целое, а так как последовательность возрастает — даже натуральное.

Заметим, что три последних члена a_3, a_4, a_5 опять образуют геометрическую прогрессию. Поэтому, в силу доказанного выше, a_6 и a_7 снова окажутся натуральными, и при этом a_5, a_6, a_7 образуют геометрическую прогрессию. Продолжая так далее, получим бесконечную последовательность натуральных чисел, в которой каждый чётный член есть среднее геометрическое своих соседей, а каждый нечётный (кроме самого первого) — среднее арифметическое.

Осталось заметить, что, так как среднее арифметическое двух различных чисел не равно среднему геометрическому, то наша последовательность ни с какого места не становится ни арифметической, ни геометрической прогрессией.

К о м м е н т а р и й. Эту же идею можно довести до решения другим образом, а именно так.

Сеня начал с трёх натуральных чисел, образующих возрастающую геометрическую прогрессию. Тогда её знаменатель равен отношению двух первых членов, значит, это рациональное число, большее 1. Пусть он равен несократимой дроби $\frac{n+k}{n}$. Тогда первый член прогрессии должен делиться на n^2. Пусть он равен an^2. Это означает, что три Сенины числа равны an^2, $an(n+k)$ и $a(n+k)^2$. Такую последовательность можно продолжить следующим образом:

$$an^2, an(n+k), a(n+k)^2, a(n+k)(n+2k), a(n+2k)^2,$$
$$a(n+2k)(n+3k), a(n+3k)^2, \ldots$$

То есть, это означает, что $a_{2i+1}=a(n+ik)^2$, $a_{2i}=a(n+(i-1)k)\times \times(n+ik)$. Легко видеть, что каждый член последовательности с чётным номером является средним геометрическим своих соседей, а каждый член последовательности с нечётным номером является средним арифметическим своих соседей.

5. Первое решение. Отразим точку B относительно прямой AC; пусть при этом отражении она переходит в точку B_1. Продлим BP и BQ до пересечения с AB_1 и CB_1 в точках M_1 и N_1 (рис. 23). Тогда треугольники AMP и AM_1P, а также CNQ и CN_1Q равны, и сумма площадей треугольников AM_1P, CN_1Q и пятиугольника $M_1PQN_1B_1$ равна половине площади ромба $ABCB_1$.

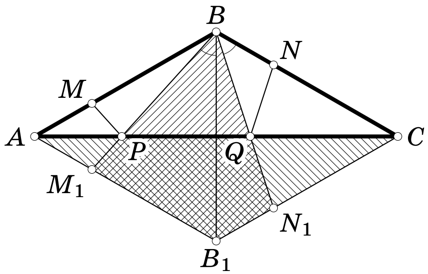


Рис. 23

Теперь покажем, что площадь четырёхугольника $M_1BN_1B_1$ также равна половине площади ромба $ABCB_1$. Для этого заметим, что $\angle M_1BB_1+\angle B_1BN_1=60^\circ=\angle B_1BN_1+ +\angle N_1BC$, а стало быть, треугольники M_1BB_1 и N_1BC равны по стороне ($BB_1=BC$) и двум прилежащим к ней углам.

Поскольку площадь треугольника B_1BC равна половине площади ромба $ABCB_1$, то и площадь четырёхугольника $M_1BN_1B_1$ равна половине площади ромба $ABCB_1$. Стало быть,

$$S_{AM_1P}+S_{M_1PQN_1B_1}+S_{CN_1Q}=S_{PQB}+S_{M_1PQN_1B_1},$$

поэтому площадь треугольника PQB равна сумме площадей треугольников AM_1P и CN_1Q, а значит, и сумме площадей треугольников AMP и CNQ.

Второе решение. (Решение основано на работе участницы олимпиады Татьяны Неретиной.) Отразим точку B относительно прямой AC; пусть при этом отражении она переходит в точку B_1. Продлим BP и BQ до пересечения с AB_1 и CB_1 в точках M_1 и N_1. Так же, как и в первом решении, можно доказать, что треугольники M_1BB_1 и N_1BC равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, а значит, $MB=M_1B_1=N_1C$. Проведём отрезок MN_1, пересекающий AC в точке O (рис. 24). В силу симметрии

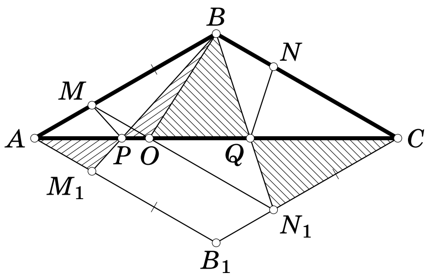


Рис. 24

отрезок NM_1 пройдёт через ту же точку O. Так как отрезки MB и N_1C параллельны и равны, то MN_1 параллелен BC, а потому BON_1C — трапеция. Значит, $S_{BOQ}=S_{CN_1Q}=S_{CNQ}$. Аналогично, $S_{BOP}=S_{AM_1P}=S_{AMP}$. Значит, $S_{PQB}=S_{BOP}+$ $+S_{BOQ}=S_{AMP}+S_{CNQ}$, что и требовалось доказать.

6. Ответ: второй игрок всегда может обеспечить себе победу.

Мотивировки и идеи. Перед тем, как описывать выигрышную стратегию второго игрока, объясним, как можно догадаться до ответа и решения. Во-первых, у второго игрока есть простая стратегия, гарантирующая ничью: каждый раз отмечать точку, симметричную ходу первого относительно центра окружности. Следовательно, искать выигрышную стратегию для первого игрока бесполезно, и игра (при наилучшей игре обоих игроков) оканчивается или вничью, или победой второго игрока.

Теперь рассмотрим случай $n=2$. Если первый игрок отметит две диаметрально противоположные точки, он обеспечит себе ничью или выиграет. Действительно, если синие точки окажутся на разных полуокружностях, то получится ничья, а если в одной — значит, выиграл первый. Следовательно, второй первым своим ходом должен выбрать точку, диаметрально противоположную точке первого. После этого первый отмечает точку на одной из полученных полуокружностей (получая таким образом дугу длины $l<\pi R$), и второй отмечает точку на другой половине окружности так, чтобы получилась дуга длины L, $l<L<\pi R$. Второй выиграл.

Теперь нам надо найти правильный аналог этой стратегии для $n>2$. Если дать первому игроку отметить все вершины некоторого правильного n-угольника, то больше, чем на ничью, рассчитывать нельзя. Действительно, получить дугу длины больше $2\pi R/n$ невозможно, а «испортить» все дуги первого можно, только поставив на каждую из них по своей точке; при этом все синие точки будут использованы, а синих дуг не образуется, то есть будет ничья. Следовательно, хотя бы раз надо отметить какую-нибудь вершину правильного n-угольника, в одну из вершин которого был сделан первый ход первого игрока. После этого можно понять, что второму вообще полезно делать ходы в вершины этого многоугольника, и получить следующее решение.

Доказательство. Приведём выигрышную стратегию второго игрока. Нарисуем правильный n-угольник, одну из вершин которого первый игрок отметил первым ходом. Пока не все вершины этого n-угольника отмечены, будем ставить синие точки в его вершины. Поскольку одна из вершин этого многоугольника уже красная, вершины многоугольника закончатся раньше, чем ходы второго игрока.

Пусть теперь все вершины этого n-угольника отмечены, причём из них r красных и $b=n-r$ синих. Будем называть дугу, соединяющую соседние вершины нашего n-угольника, *красной*, если оба её конца окрашены в красный цвет, и *синей* в противном случае. Заметим, что красных дуг не более $r-1$. Действительно, красные дуги образуют одну или несколько групп подряд идущих дуг. Соответственно, и красные точки разбиваются по этим группам. Но в каждой такой группе дуг на 1 меньше, чем концов дуг. Значит, красных дуг меньше, чем красных точек. Поскольку всего дуг и всего точек поровну, то синих дуг больше, чем синих точек, то есть синих дуг не менее $b+1$.

За следующие $r-1$ ход второй игрок должен отметить по одной точке внутри каждой из красных дуг. Посмотрим теперь, какая ситуация сложилась к последнему ходу второго игрока. Первый игрок отметил r вершин n-угольника и ещё $n-r=b$ других точек. Следовательно, на одной из синих дуг нет отмеченных точек, и второй может обеспечить себе дугу длины, сколь угодно близкой к $2\pi R/n$. С другой стороны, на каждой из красных дуг длины $2\pi R/n$ есть хотя бы одна синяя точка. Таким образом, второй выигрывает.

10 класс

1. Ответ: 1100 рублей.

Пусть Федя положил n рублей, а взимаемая комиссия составляет k %. Тогда $\frac{847}{100-k}=\frac{n}{100}$, то есть $84700=(100-k)n$. Разложим число 84700 на простые множители, получим:

$$84700=2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7\cdot11\cdot11.$$

По условию задачи $70<100-k<100$, поэтому необходимо найти все числа, делящие 84700 из этого диапазона. Небольшим перебором выясняется, что единственный подходящий вариант — это $7\cdot11=77$, значит, $k=23$. Таким образом, Федя положил на телефон $n=\frac{84700}{77}=1100$ рублей.

2. Ответ: нет, не обязательно.

Рассмотрим последовательность: 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, ..., k^2, $k(k+1)$, $(k+1)^2$, $(k+1)(k+2)$, $(k+2)^2$, ... Заметим, что

$$k(k+1)=\sqrt{k^2\cdot(k+1)^2},\quad (k+1)^2=\frac{k(k+1)+(k+2)(k+1)}{2}.$$

Таким образом, средние арифметические и геометрические чередуются. Осталось заметить, что эта последовательность не является ни арифметической, ни геометрической прогрессией, поскольку $k(k+1)-k^2=k$ и $\frac{k(k+1)}{k^2}=\frac{k+1}{k}$ зависят от k. Значит, построенная последовательность — искомая.

3. Ответ: да, всегда.

Рассмотрим прямоугольник П в левом верхнем углу. Пусть с ним граничат снизу прямоугольники $A_1, \ldots, A_n$ в порядке слева направо, справа — $B_1, \ldots, B_m$ в порядке сверху вниз (рис. 25). Тогда либо нижние стороны П и B_m лежат на одной прямой, либо правые стороны П и A_n лежат на одной прямой, иначе прямоугольники A_n и B_m

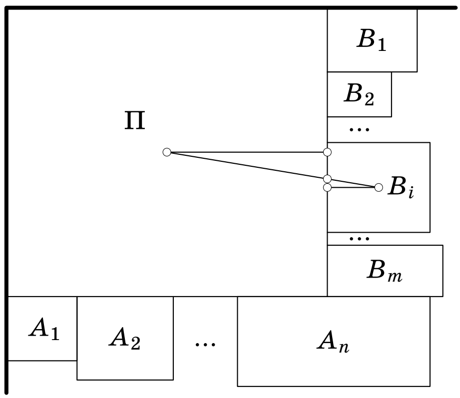


Рис. 25

пересекаются. Без ограничения общности будем считать, что на одной прямой лежат нижние стороны П и B_m. Выберем прямоугольник B_i, на границе которого лежит середина правой стороны П. Если таких два, можно выбрать любой. Тогда отрезок I, соединяющий середины П и B_i, не пересекает других прямоугольников: правую сторону П I пересекает в точке между серединой правой стороны П и серединой левой стороны B_i.

4. Ответ: нет, не существует.

Пусть при каком-то начальном расположении бусинок нашлась последовательность ходов, в результате которой какая-то бусинка прошла полный круг против часовой стрелки или больше. Обозначим начальное положение этой бусинки O. Тогда положения бусинок определяются углом от точки O с точностью до 2π, причём углы по часовой стрелке будем считать со знаком $-$, а углы против часовой стрелки

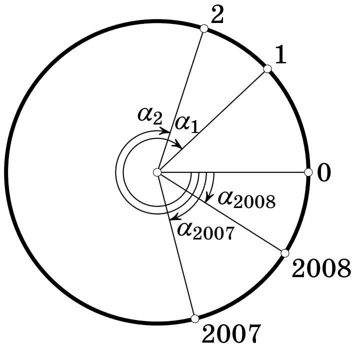


Рис. 26

со знаком $+$ (рис. 26). Занумеруем бусинки по порядку. Обозначим за α_i угол до i-й бусинки. Тогда вначале имеем:

$$-2\pi < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2009} = 0.$$

Заметим, что перемещению i-й бусинки соответствует замена α_i на $\dfrac{\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}}{2}$ при $i = 2, \ldots, 2008$, для первой бусинки имеем замену $\dfrac{\alpha_2 + \alpha_{2009} - 2\pi}{2}$, для 2009-й $\dfrac{\alpha_1 + \alpha_{2008} + 2\pi}{2}$. То, что бусинка прошла полный круг или более, означает, что α_{2009} стал $\geqslant 2\pi$. Но вначале верно, что $\alpha_i < \dfrac{2\pi i}{2009}$, и при вышеуказанных преобразованиях это свойство сохраняется, значит α_{2009} всегда меньше 2π. Противоречие. Значит, так не могло быть.

5. Опустим из B и A_1 высоты на AC соответственно в точки B_3 и B_4, аналогично построим точки A_3 и A_4 (рис. 27). Заметим, что $AB_1 = BA_1 = p - c$, где p — полупериметр треугольника ABC. Таким образом, $A_3A_4 = B_3B_4 = (p - c)\cos\gamma$. Отрезки A_3A_4 и B_3B_4 являются проекциями отрезка A_2B_2 на прямые AC и BC, но эти отрезки равны, поэтому отре-

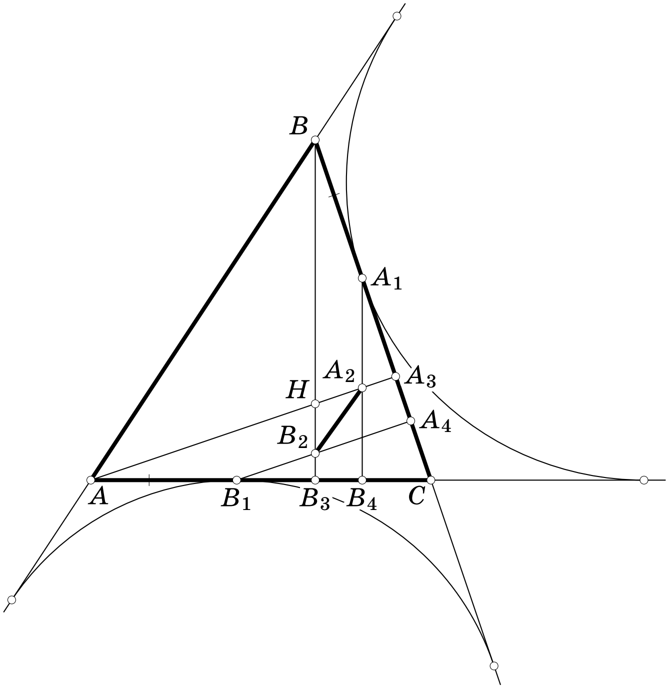


Рис. 27

зок A_2B_2 с ними составляет равные углы. Значит, он либо перпендикулярен биссектрисе угла $\angle C$, либо параллелен ей. Обозначим ортоцентр треугольника ABC за H. Заметим, что так как B_1 лежит на отрезке AC, то A_4 лежит на отрезке A_3C, а значит B_2 лежит на луче HB_3. Аналогично A_2 лежит на луче HA_3. Значит, биссектриса угла A_3HB_3 пересекает отрезок A_2B_2. Но эта биссектриса параллельна биссектрисе угла ACB (так как в четырёхугольнике HA_3CB_3 углы A_3 и B_3 — прямые). Таким образом, получаем, что A_2B_2 не параллелен биссектрисе угла C, значит, он ей перпендикулярен, что и требовалось доказать.

6. Пусть $0<k<m<n$. Посчитаем в n-элементном множестве количество пар из m-элементного подмножества и содержащегося в нём k-элементного подмножества. С одной стороны, можно выбрать k элементов, потом дополнить до

m-элементного подмножества, то есть сделать это $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_n^k C_{n-k}^{n-m}$ способами, с другой стороны, можно сначала выбрать m-элементное множество, потом в нём выбирается k-элементное подмножество, что делается $C_n^m C_m^k$ способами. Значит, $\frac{C_n^m}{C_n^k} = \frac{C_{n-k}^{n-m}}{C_m^k}$. Но $C_n^k > C_m^k$. Поэтому НОД$(C_n^m, C_n^k) > 1$.

11 класс

1. Ответ: $2+\sqrt{2}$.

Так как $h'(t_0)=0$ и $h(t_0)=0$, то $a \neq 0$ (в противном случае функция h была бы нулевой, и уровень воды в бассейне, вопреки условию задачи, не мог бы понизиться), а абсцисса и ордината вершины параболы $y=h(t)$ равны соответственно t_0 и 0, поэтому

$$h(t)=a(t-t_0)^2, \quad t \leqslant t_0.$$

Обозначив через T искомое время полного слива бассейна, из условия задачи имеем

$$h(t_0-T)=2h(t_0-T+1) \Rightarrow aT^2=2a(T-1)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow T^2-4T+2=0 \Rightarrow T=2\pm\sqrt{2}$$

и, учитывая, что $T>1$, окончательно получаем $T=2+\sqrt{2}$.

Комментарий. Из законов физики известно, что функция $y=h(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'=-k\sqrt{y}, \quad k>0,$$

которое описывает высоту уровня жидкости в сосуде, имеющем отверстие в своём дне. Решением этого уравнения как раз и служит указанная в задаче квадратичная функция (до момента полного вытекания жидкости).

2. Ответ: нет, не могла.

Каждая спица, протыкая моток насквозь, образует на его поверхности две фигуры: по одной при входе и выходе из него. Поэтому площадь поверхности полученного цилиндра складывается из площади поверхности мотка (которая, возможно, и уменьшилась после его протыкания спицами, но всё же осталась положительной) и площадей этих фигур.

Площадь каждой из таких фигур не меньше площади круга, образованного ортогональным сечением спицы. Так как радиус каждого такого круга, по условию, равен 1, а всего спиц 72, то, обозначив высоту цилиндра через h, получим для площади его поверхности неравенство

$$2\cdot\pi\cdot 6^2+2\pi\cdot 6\cdot h>2\cdot 72\cdot\pi,$$

откуда $h>6$.

3. Касательная к графику функции $y=\sin x$, где $x\in(0;\alpha)$, проведённая в заданной его точке $(x_0, \sin x_0)$, имеет угловой коэффициент, т. е. тангенс угла наклона к оси Ox, равный $\cos x_0$, и для её построения при помощи циркуля и линейки достаточно построить отрезок длины 1. Действительно, имея отрезки 1 и $\sin x_0$, можно построить отрезок $|\cos x_0|$ (при помощи тригонометрического круга), а значит, и угол, тангенс которого равен $\cos x_0$. Покажем, как построить отрезок длины 1 (т. е. восстановить масштаб).

а) Из точки $A=(a, \sin a)$, где $a\in\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$, лежащей на графике функции, опустим перпендикуляр на ось Oy (рис. 28). Так как $\sin(\pi-a)=\sin a$, то этот перпендикуляр пересечёт график функции $y=\sin x$ в точке $B=(\pi-a, \sin a)$. Через середину отрезка AB проведём прямую, перпендикулярную оси Ox. Она пересечёт график в точке $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Отрезок этой прямой от оси Ox до графика функции $y=\sin x$ имеет длину 1.

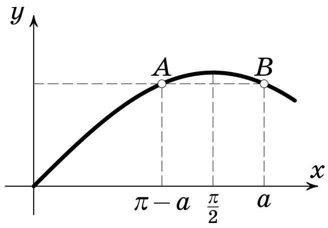


Рис. 28

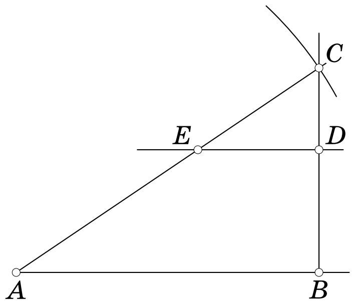


Рис. 29

б) Здесь несколько труднее построить отрезок единичной длины. Остальные построения будут такими же.

Пусть a и b — произвольные точки на оси Ox, удовлетворяющие условию $0 < b < a < \alpha$. Построим отрезок AB длины $\sin a + \sin b$. Через точку B проведём луч l, перпендикулярный отрезку AB. Окружность с центром в точке A и радиусом $2\sin\frac{a+b}{2}$ пересекает луч l в точке C (рис. 29). Так как $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$, то $\angle CAB = \frac{a-b}{2}$. На отрезке BC отметим точку D такую, что $BD = \sin\frac{a-b}{2}$. Через точку D проведём прямую, параллельную отрезку AB. Эта прямая пересечёт отрезок AC в точке E. Длина отрезка AE равна 1, так как

$$\sin\angle CAB = \sin\frac{a-b}{2} = \frac{BD}{AE}.$$

4. Ответ: б) $72°, 108°, 72°, 108°$ или $72°, 72°, 72°, 144°$.

Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, O — центр вписанной в него окружности, прямые AO, CO — две из трёх прямых, данных в условии.

а) Если точка O лежит на прямой AC, то эта прямая является осью симметрии четырёхугольника $ABCD$ (т. к. лучи AO и CO являются биссектрисами углов A и C соответственно), поэтому прямые BO и DO одновременно обладают указанным свойством. Рассмотрим случай, когда прямые AO и CO не совпадают и пересекают границу четырёхуголь-

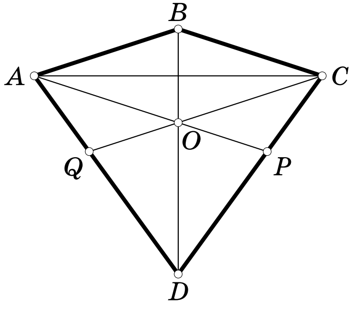


Рис. 30

ника в точках P и Q соответственно (рис. 30), на котором для определённости $P \in CD$, $Q \in AD$).

Из условия следует, что треугольники AOQ и COP равновелики, а так как их высоты, опущенные из вершины O, равны, то $AQ = CP$. Кроме того, $\angle AOQ = \angle COP$, поэтому $AO \cdot OQ = CO \cdot OP$ и, по теореме косинусов,

$$AO^2 + OQ^2 - 2AO \cdot OQ \cos \angle AOQ = AQ^2 = \\ = CP^2 = CO^2 + OP^2 - 2CO \cdot OP \cos \angle COP,$$

откуда $AO + OQ = CO + OP$. Поэтому либо $AO = OP$ и $OQ = CO$, либо $AO = OC$ и $OQ = OP$ (по теореме, обратной теореме Виета) и треугольники AOQ и COP равны. При этом, если $AO = OP$ и $OQ = CO$, то $\angle OAQ = \angle OPC$, а значит $AD \parallel CD$, что неверно. Поэтому $\angle OAQ = \angle OCP$ и $AO = OC$, откуда $\angle CAO = \angle ACO$, а значит, $\angle CAD = \angle ACD$ и $AD = CD$, а тогда и $AB = BC$ (т. к. $AB + CD = BC + AD$). Значит, четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой BD, на которой, таким образом, лежит точка O, т. е. прямые BO и DO совпадают.

б) В п. а) мы доказали, что четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно одной из своих диагоналей. Если он симметричен относительно и другой диагонали, то он — ромб и его углы равны $72°, 108°, 72°, 108°$. Обратно, ромб с такими углами удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим случай, когда ось симметрии только одна (без ограничения общности этот случай можно разбирать по рис. 30). Так же, как и в п. а), получаем, что треугольники AOB и DOP равновелики и равны. При этом $\angle OAB \neq \angle OPD$ (иначе $AB \parallel CD$ и, в силу симметрии, $BC \parallel AD$, а т. к. $AC \perp BD$, то $ABCD$ — ромб), так что $\angle OAB = \angle ODP$, откуда $\angle BAD = \angle ADC = \angle BCD < 90°$ (т. к. $\angle AOD > 90°$, а значит, $\angle OAD < 45°$). Поэтому $\angle BAD = \angle ADC = \angle BCD = 72°$, а $\angle ABC = 144°$.

Четырёхугольник $ABCD$ с такими углами, удовлетворяющий условию задачи, существует: его можно составить из равных треугольников AOB, COB, DOQ, DOP и равных треугольников AOQ, COP (рис. 31). Высоты первых четырёх треугольников, опущенные из вершины O, равны,

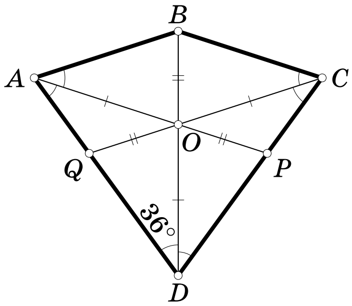


Рис. 31

поэтому точка O является центром окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$; каждая из прямых AO, BO, CO, DO делит его на два равносоставленных, а значит, и равновеликих многоугольника.

Комментарий. 1. Тот факт, что треугольник однозначно определяется одной из сторон, опущенной на неё высотой и противолежащим этой стороне углом, можно доказать чисто геометрически, используя следующее утверждение: геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, являются две дуги окружностей, стягиваемые этим отрезком как хордой, в которые данный угол вписан (рис. 32).

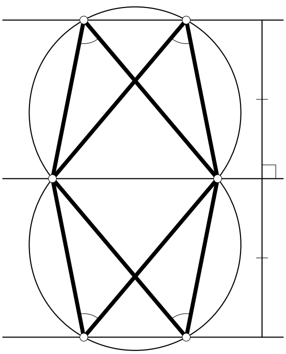


Рис. 32

2. Четырёхугольник, для которого каждая из прямых, проходящих через вершину и центр вписанной окружности, делит его на две равновеликие части, — это либо ромб, либо выпуклый дельтоид, у которого три угла равны (не обязательно номеру текущей олимпиады в градусах!) и меньше четвёртого, т. е. углы которого имеют вид $\alpha, \alpha, \alpha, 360^\circ-3\alpha$, причём $\alpha<360^\circ-3\alpha<180^\circ$, или, что то же самое, $60^\circ<\alpha<90^\circ$.

5. Ответ: $p+1$.

Если $(p^2)!$ кратно $(p!)^n$, $n\in\mathbb{N}$, то $n\leqslant p+1$, так как p входит в разложение числа $p!$ на простые множители в степени 1 (а значит, в разложение числа $(p!)^n$ — в степени n), а в разложение числа $(p^2)!$ — в степени $p+1$. Докажем, что $(p^2)!$ делится на $(p!)^{p+1}$.

Первое решение. Запишем p^2 различных элементов в виде таблицы $p\times p$. Две такие таблицы назовём эквивалентными, если одна получается из другой некоторыми перестановками элементов внутри строк, а также некоторой перестановкой самих строк (всего $p+1$ перестановка p объектов). Так как m объектов можно переставить $m!$ способами, то всего таблиц $(p^2)!$, и они разбиваются на классы эквивалентных по $(p!)^{p+1}$ таблиц в каждом классе, поэтому $(p^2)!$ делится на $(p!)^{p+1}$.

Второе решение. При всех натуральных $k\leqslant n$ число

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

является целым, потому что равно количеству k-элементных подмножеств n-элементного множества. Действительно, всякое k-элементное подмножество можно $k!$ способами упорядочить, а число упорядоченных наборов длины k из n элементов равно $n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

Поэтому $\dfrac{(p^2)!}{(p!)^p}=\prod\limits_{i=1}^{p} C_{pi}^p$ кратно $p!$, так как

$$C_{pi}^p=\frac{pi(pi-1)\ldots(pi-p+1)}{p\cdot(p-1)!}=iC_{pi-1}^{p-1}$$

кратно i при всех $i=1,\ \ldots,\ p$.

Третье решение. Возьмём произвольное простое число $q\leqslant p$ и докажем, что в разложение числа $(p!)^{p+1}$ на простые множители оно входит в степени, не большей, чем в разложение числа $(p^2)!$.

Так как среди чисел 1, ..., p ровно $\left[\dfrac{p}{q^i}\right]$ чисел делятся на q^i (через $[x]$ обозначена целая часть x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x), то в разложение числа $(p!)^{p+1}$ на простые множители число q входит в степени $(p+1)\sum\limits_{i=1}^{[\log_q p]}\left[\dfrac{p}{q^i}\right]$ (верхний индекс суммирования — наибольшее целое k такое, что $q^k \leqslant p$), а в разложение числа $(p^2)!$, по аналогичным причинам, — в степени $\sum\limits_{i=1}^{[\log_q p^2]} \left[\dfrac{p^2}{q^i}\right]$.

Используя оценку $n[x] \leqslant [nx], n \in \mathbb{N}$ (следующую из неравенства $n[x] \leqslant nx$ с учётом того, что $n[x] \in \mathbb{Z}$), получим неравенства

$$p\left[\frac{p}{q^i}\right] \leqslant \left[\frac{p^2}{q^i}\right], \quad i=1, \ldots, [\log_q p]. \tag{1}$$

А оценив $[\log_q p] \leqslant \log_q p$, получим неравенства

$$\left[\frac{p}{q^i}\right] \leqslant \left[\frac{p^2}{q^{[\log_q p]+i}}\right], \quad i=1, \ldots, [\log_q p]. \tag{2}$$

Суммируя неравенства (1) и (2) по всем указанным i, получим

$$(p+1)\sum_{i=1}^{[\log_q p]} \left[\frac{p}{q^i}\right] \leqslant \sum_{i=1}^{2[\log_q p]} \left[\frac{p^2}{q^i}\right] \leqslant \sum_{i=1}^{[\log_q p^2]} \left[\frac{p^2}{q^i}\right].$$

6. Расположим все «двузначные» числа внутри квадратов решётки специального вида, как указано на рис. 33. Назовём два квадрата этой решётки соседними, если их границы имеют общий отрезок. Тогда любые два числа, расположенные в соседних квадратах, будут отличаться друг от друга на 1, 10 или 11.

Разобьём «двузначные» числа произвольным образом на две группы. Будем называть чёрными все квадраты верхней (незаполненной) строки, а также все такие квадраты S, для которых найдётся ломаная $L(S)$ с началом в центре S и концом в центре какого-либо квадрата верхней строки, все звенья которой соединяют центры соседних квадратов, не содержащих числа второй группы. Остальные соседние с чёрными квадраты решётки будем называть белыми. Нетрудно видеть, что все белые квадраты содержат числа второй группы.

Если в нижней строке решётки найдётся чёрный квадрат S, то следуя вдоль звеньев ломаной $L(S)$ до её пересечения с верхней строкой, запишем в ряд числа первой группы,

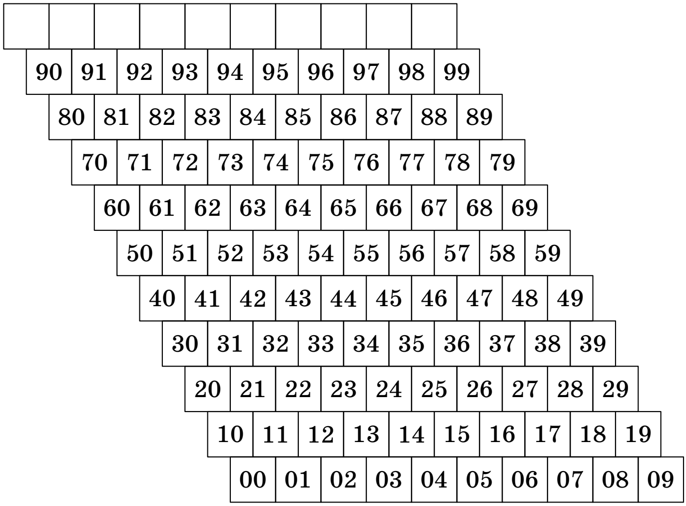


Рис. 33

расположенные в квадратах, через которые эта ломаная проходит (рис. 34). Соседние числа этого ряда расположены в соседних квадратах и, следовательно, отличаются на 1, 10 или 11. Заметим также, что ломаная $L(S)$ пересекает каждую строку решётки. Значит, в разряде десятков чисел построенного ряда встретятся все 10 различных цифр. В этом случае искомый ряд построен из чисел первой группы.

Если же в нижней строке решётки не найдётся чёрного квадрата, то рассмотрим фигуру, образованную чёрными квадратами (рис. 35). Внешний её периметр представляет собой замкнутую ломаную, все вершины которой являются вершинами квадратов решётки, а каждое из её звеньев принадлежит одному из двух типов: оно является либо отрезком внешней границы решётки, либо общим отрезком границ чёрного и белого квадратов. Некоторые звенья второго типа образуют ломаную l с началом в вершине левого края решётки и концом в вершине правого края решётки. Следуя вдоль звеньев ломаной l, запишем в ряд числа, расположенные в белых квадратах, вдоль границ которых мы проходим. Все эти числа принадлежат второй группе.

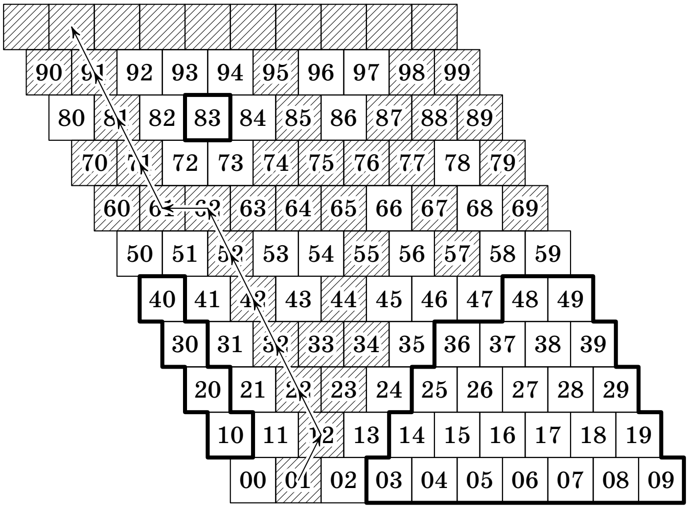

90 91 92 93 94 95 96 97 98 99
80 81 82 83 84 85 86 87 88 89
70 71 72 73 74 75 76 77 78 79
60 61 62 63 64 65 66 67 68 69
50 51 52 53 54 55 56 57 58 59
40 41 42 43 44 45 46 47 48 49
30 31 32 33 34 35 36 37 38 39
20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
00 01 02 03 04 05 06 07 08 09

Рис. 34

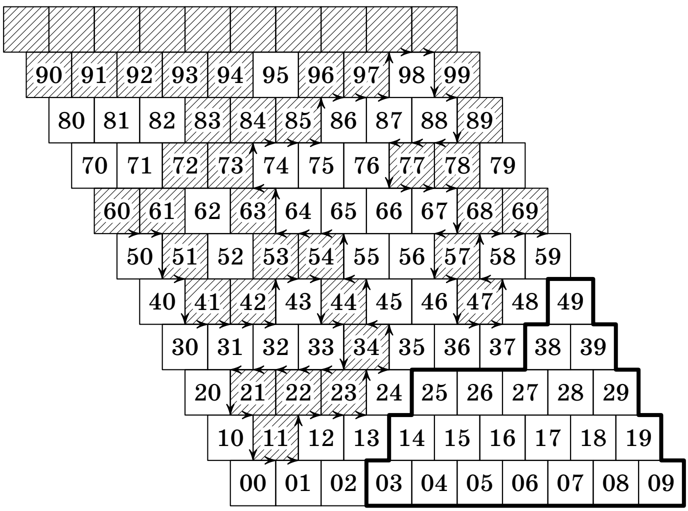

90 91 92 93 94 95 96 97 98 99
80 81 82 83 84 85 86 87 88 89
70 71 72 73 74 75 76 77 78 79
60 61 62 63 64 65 66 67 68 69
50 51 52 53 54 55 56 57 58 59
40 41 42 43 44 45 46 47 48 49
30 31 32 33 34 35 36 37 38 39
20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
00 01 02 03 04 05 06 07 08 09

Рис. 35

Заметим, что если какие-либо два соседних звена ломаной l не являются частью границы одного белого квадрата, то два белых квадрата, вдоль границ которых они проходят, сами являются соседними. Следовательно, любые два соседних числа построенного ряда отличаются на 1, 10 или 11. Квадраты первого и последнего чисел этого ряда примыкают соответственно к левому и правому краям решётки, поэтому ломаная l пересечёт каждый из наклонных влево столбов решётки. Следовательно, в разряде единиц чисел построенного ряда встретятся все 10 различных цифр. В этом случае искомый ряд построен из чисел второй группы.

Отметим, что числа каждого из построенных в этих двух случаях рядов могут повторяться. Отбрасывая «зацикленные» участки такого ряда, можно получить искомый ряд уже без повторений входящих в него чисел.

Комментарии к рисункам 34 и 35. Чёрные квадраты решётки заштрихованы, а жирной линией обведены квадраты, не используемые в решении задачи.

На рисунке 34 стрелками показан путь вдоль ломаной $L(S)$. Ряд чисел первой группы, построенный в решении для указанного на рисунке случая: 01, 12, 22, 32, ..., 81, 91.

На рисунке 35 стрелками показан путь вдоль ломаной l. Ряд чисел второй группы, построенный в решении для указанного на рисунке случая: 50, 40, 30, 31, 32, 43, 33, 32, ..., 58, 59. В этом ряде «зацикленными» являются участки 32, 43, 33, 32, 31 и 98, 88, 87.

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс (1275 работ)

Баллы	Задача						
	1	2	3	4	5	6а	6б
0	657	585	886	302	656	1041	1228
1	151	3	100	279	42	131	16
2	275	0	160	115	524	38	23
3	192	1	22	73	31	15	4
4		686	16	80	5	3	1
5			9	74	2	47	3
6			82	174	6	0	
7				178	9		

7 класс (888 работ)

Баллы	Задача						
	1	2	3	4	5а	5б	6
0	228	735	208	703	610	840	548
1	398	32	11	77	2	1	3
2	4	23	125	52	59	16	5
3	149	16	311	3	3	3	59
4	45	13	16	5	0	25	14
5	64	69	217	3	213	2	218
6				45			5
7							35

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс (637 работ)

Оценка	Задача					
	1	2	3	4	5	6
+/+.	183	147	19	29	0	4
±	1	8	2	4	1	1
∓	2	15	164	22	2	64
−/−.	372	311	249	477	256	409
0	79	156	203	105	378	159

9 класс (550 работ)

Оценка	Задача					
	1	2	3	4	5	6
+	167	168	43	3	8	1
+.	1	2	7	4	0	1
±	8	8	5	3	3	0
+/2	0	7	0	0	2	0
∓	26	2	21	21	1	9
−.	0	1	15	29	3	0
−	227	154	370	253	241	408
0	121	208	89	237	292	131

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

10 класс (628 работ)

Оценка	Задача					
	1	2	3	4	5	6
+	96	25	54	1	5	4
+.	18	24	1	0	1	0
±	114	8	5	1	9	0
∓	113	25	3	2	3	1
−.	123	12	1	0	1	0
−	142	273	404	358	216	258
0	22	261	160	265	393	365

11 класс (1098 работ)

Оценка	Задача							
	1	2	3а	3б	4а	4б	5	6
+	551	81	107	20	15	3	35	4
±	101	23	36	6	17	9	17	1
∓	65	40	56	10	21	22	256	39
−	381	954	899	1062	1045	1064	790	1054

О Г Л А В Л Е Н И Е

LXXII Московская математическая олимпиада.
Задачи и решения

Подписано в печать 30/III 2009 г.
Формат бумаги 60 × 90 1/16. Объём 3 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 3000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241—74—83.

Отпечатано в ООО «Типография „САРМА“».

Департамент образования города Москвы
Совет ректоров высших учебных заведений Москвы и Московской обл.
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXII

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Издательство МЦНМО
Москва, 2009

ИНФОРМАЦИЯ О НАБОРЕ

в московские специализированные школы и классы на 2009/2010 учебный год*

Школа, адрес, тел., адрес в Интернете	Набираемые классы	Сроки приёма
№ 2 (499) 137–17–69 ул. Фотиевой, 18 (499) 137–69–31 http://www.sch2.ru/ http://www.school2.ru/	7 и 8 физ.-матем.	Приём заявлений с 31 января; вступительные испытания с марта
№ 25 (495) 939–39–35 Университетский пр., 7 http://sch25.ru/	7 и 8 физ.-матем., (*добор* в 9 физ.-матем.); 10 матем. при мехмате МГУ.	По вторникам с 16^{00} в каб. 30а
№ 54 (499) 245–54–25 ул. Доватора, 5/9 (499) 245–99–72 http://moscowschool54.narod.ru	8, 9 матем. при мехмате МГУ.	С января по май по четвергам с 10^{20} до 12^{00} в каб. 36
№ 57 (495) 691–85–72 М. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (495) 691–54–58 http://www.sch57.msk.ru/	8 матем., 9 матем.	По средам в 16^{00} с 11 марта
№ 91 (495) 690–35–58 ул. Поварская, 14 http://www.91.ru/ sch91-math@yandex.ru	9 матем.	Собеседования 6 (или 9), 13, 16, 20 и 23 апреля в 16^{00}
№ 179 (495) 692–48–51 ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 http://www.179.ru/	7, 8, 9 матем.	Март–апрель
№ 192 (499) 137–33–55 Ленинский просп., 34-А (499) 137–72–85 http://www.sch192.ru/ mail@sch192.ru	5 ест.-научный, 7 био.-хим., физ.-матем., 9 физ.-хим., 10 физ.-хим.; *добор* в 6 подготов. к лицейск., 8, 9, 10 био.-хим., 8, 9, 10 физ.-матем.	Март–май по пятницам в 16^{00}

* Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно. Обучение в школах (классах) бесплатное.

Школа, адрес, тел., адрес в Интернете	Набираемые классы	Сроки приёма
№ 218 Дмитровское ш., 5а (495) 976–19–85 sch218.edu@mtu-net.ru http://www.mccme.ru/schools/218/	6, 7 разноур. обуч. (матем. и рус. яз.), 8 инд. уч. планы с возм. углуб. изучения матем., физ., информ., рус. и ин. яз., литерат., ист., биол.; *добор* в 9 и 10	Запись на собеседование с 30 марта по телефону (понед., среда, пятница 16^{00}–18^{00})
№ 463 (495) 312–33–51 Судостроительная ул., 10 (499) 612–34–19 http://sch463.edite.ru	8 при МФТИ, *добор* в 9, 10.	Экзамен 14 марта в 10^{30} в школе 1173
№ 1173 (495) 312–33–51 Чертановская ул., 27-Б (499) 313–06–46 http://sch1173.tdusite.ru	8 при МФТИ, *добор* в 9, 10.	Экзамен 14 марта в 10^{30}
№ 1303 Таможенный пр., д. 4 (495) 362–34–40 http://www.1303.ru shark@lebedev.ru	9 физ.-матем., *добор* в 10 физ.-матем.	Апрель–май
№1434 ул. Раменки 15, корп. 1 (495) 932–00–00 http://coe1434.ru http://school1134.org.ru	9 физ.-матем. при мехмате МГУ *добор* в 10 физ.-матем. при мехмате МГУ	По вторникам с 16^{30} в каб. 34а
№ 1543 (495) 433–16–44 ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (495) 434–26–44 http://www.1543.ru	8 матем., физ.-хим., био., гум.	Апрель
СУНЦ МГУ (495) 445–11–08 Кременчугская ул., 11 priem@pms.ru http://www.pms.ru	10 физ.-матем., комп.-информ., хим., био., 11 физ.-матем.	В Москве в апреле, в других городах с марта по май
«Интеллектуал» (495) 445–52–10 Кременчугская ул., 13 http://int-sch.ru	5 класс (15–18 чел.). Разноур. обуч. с возм. угл. изуч. матем., ист., биол., химии, геогр. и др. предм., *добор* в 6–10, широкий выбор кружков	Запись на экзамены с февраля, экзамены в кон. марта–нач. апр.

Более подробная информация о наборе в эти и другие школы — на сайте http://www.mccme.ru

РАСПИСАНИЕ МЕРОПРИЯТИЙ
4 апреля 2009 года

Время	Мероприятие	Место проведения (аудитория)			
		8 класс	9 класс	10 класс	11 класс
15^{00}	Разбор задач	02	01	14–08	16–10
16^{30}	Показ работ	16–24	01	14 этаж	12–12
17^{00}	Лекция проф. А. В. Булинского в ауд. 02				
18^{30}	Торжественное закрытие, награждение победителей	02			

Награждение наградами награждённых, не награждённых наградами на награждении будет происходить по средам с 16^{00} до 18^{00} в комн. 303 МЦНМО.

Адрес: Бол. Власьевский пер., 11, ст. м. «Кропоткинская» или «Смоленская».

Тел. (499) 241–12–37.

http://www.mccme.ru/, e-mail: mmo@mccme.ru

ЖУРНАЛ «КВАНТ» В ИНТЕРНЕТЕ
http://kvant.mccme.ru/

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

Сейчас старые номера журнала «Квант» практически недоступны читателям. Имеется ничтожное число библиотек, в которых есть полное собрание вышедших журналов. Этот сайт призван открыть путь к богатому архиву журнала всем, кто этого пожелает.

На сайте представлены постранично все номера журнала с № 1 за 1970 год по № 2 за 2008 год.