Ответы к заданиям части 1

№ задания	Ответ
B1	5
B2	3
B3	28
B4	2970
B5	592
B6	14
B7	2
B8	7
B9	2
B10	0,4
B11	58
B12	45
B13	14
B14	27

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
C1	а) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in ¢$.; б) $-\frac{4\pi}{3}$
C2	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{3}$
C3	$\left[\frac{1+\log_{25}\frac{7}{24}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$
C4	$1:8$ или $1:2$
C5	$-8; -72$
C6	а) да; б) нет; в) да

C1

а) Решите уравнение $\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)=-2\sqrt{3}$.

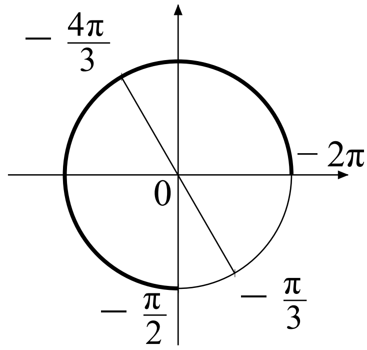
б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\sin 2x=-2\sqrt{3}\,;\qquad \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}=-2\sqrt{3}\,;\qquad \operatorname{tg} x=-\sqrt{3}\,.$$

Получаем: $x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$.



б) Отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$ принадлежит единственный корень $-\dfrac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$.; б) $-\dfrac{4\pi}{3}$.

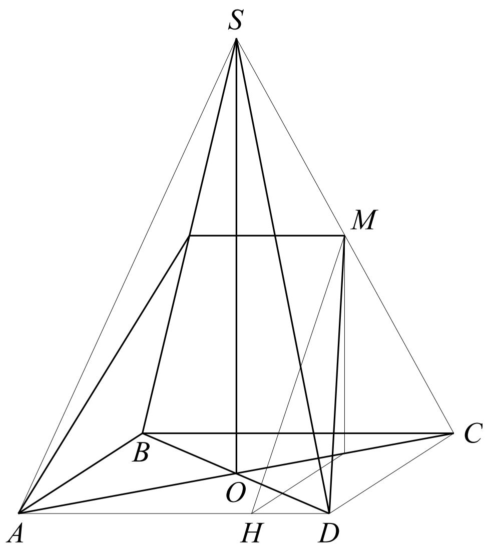
Баллы	**Критерии оценивания выполнения задания С1**
2	Уравнение решено верно, указаны все корни, принадлежащие отрезку
1	Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

В правильной четырехугольной призме пирамиде $SABCD$ с вершиной S боковые ребра вдвое длиннее сторон основания. Точка M – середина ребра SC. Найдите угол между плоскостью ADM и плоскостью основания.

Решение.

Проведем из точки M перпендикуляры MP к плоскости основания и MH к ребру AD. Прямая PH перпендикулярна AD, так как $MH \perp AD$ и $MP \perp AD$. Значит, угол MHP – линейный угол искомого угла.

Длина MP равна половине высоты пирамиды SO, которую найдем из треугольника SOD. Приняв длину стороны основания за a, получаем:



$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{7}}{2}$ Длина HP равна $\frac{3}{4}a$.

Следовательно, $\operatorname{tg} MHP = \frac{MP}{HP} = \frac{a\sqrt{7}}{4} : \frac{3}{4}a = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С2
2	Обосновано получен верный ответ
1	Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

C3 Решите систему:

$$\begin{cases} 625^x - 25^{2x-1} \geq 7, \\ \log_{2x+1}\left(4x^2 - 4x + 1\right) \cdot \log_{1-2x}\left(2 + 4x\right) \geq 2. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$5^{3x-2} \geq \frac{7}{24}; \quad 3x - 2 \geq \log_5 \frac{7}{24}; \quad x \geq \frac{2 + \log_5 \frac{7}{24}}{3}.$$

Решим второе неравенство:

$$\log_{2x+1}\left(2x-1\right)^2 \cdot \log_{1-2x}\left(2+4x\right) \geq 2.$$

Переходя в первом логарифме к основанию $1-2x$, а во втором – к основанию $2x+1$, получаем:

$$\log_{1-2x}\left(1-2x\right)^2 \cdot \log_{2x+1}\left(4x+2\right) \geq 2;$$

$$\log_{1-2x}\left(1-2x\right)^2 \cdot \left(\log_{2x+1} 2 + \log_{2x+1}\left(2x+1\right)\right) \geq 2.$$

При условиях $1-2x > 0$ и $1-2x \neq 1$ находим:

$$2\left(\log_{2x+1} 2 + 1\right) \geq 2; \quad \log_{2x+1} 2 \geq 0; \quad 2x+1 > 1; \quad x > 0.$$

Следовательно, $0 < x < \frac{1}{2}$.

Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Сравним числа $\dfrac{1 + \log_{25} \frac{7}{24}}{2}$ и $\dfrac{1}{2}$:

Поскольку $\log_{25} \frac{7}{24} < 0$, получаем:

$$7\sqrt{5} < 24 \leq 245 < 576; \quad \frac{1 + \log_{25} \frac{7}{24}}{2} \leq x < \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left[\dfrac{1 + \log_{25} \frac{7}{24}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания C3
3	Обосновано получен верный ответ
2	Оба неравенства системы решены верно, но система решена неверно
1	Либо верно решено только одно из двух неравенств системы, либо в решениях двух неравенств содержатся арифметические ошибки
0	Решение не соответствует ни одному из критериев,

	перечисленных выше
3	*Максимальный балл*

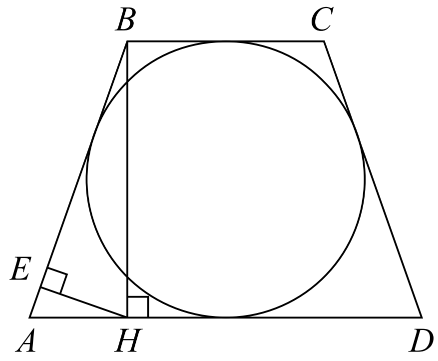
C4 В описанной около окружности равнобокой трапеции основания относятся как $1:2$. Из вершины меньшего основания опущена высота на большее основание; точка H — основание высоты. Из точки H опущен перпендикуляр HE на боковую сторону трапеции. В каком отношении точка E делит боковую сторону?

Решение.

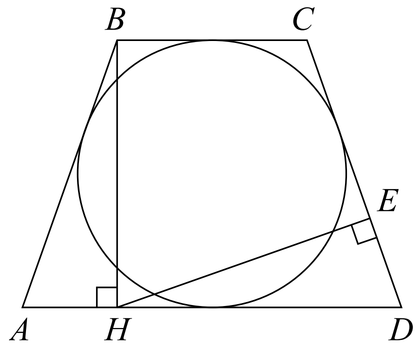
Пусть из вершины B трапеции $ABCD$ опущена высота BH на основание AD. Пусть основания равны $AD = 4x$ и $BC = 2x$.

$$AH = \frac{AD - BC}{2} = x, \text{ а } DH = \frac{AD + BC}{2} = 3x.$$

Суммы противоположных сторон трапеции равны, поэтому AB также равняется $\frac{AD + BC}{2} = 3x$.



1 случай: точка E лежит на стороне AB. Катет прямоугольного треугольника равен среднему геометрическому между гипотенузой и своей проекцией на гипотенузу: $AH^2 = AE \cdot AB$, откуда $AE = \frac{AH^2}{AB} = \frac{1}{3}x$. Следовательно, $BE = AB - AE = \frac{8}{3}x$, и $AE : BE = 1:8$.



2 случай: точка E лежит на стороне CD. По гипотенузе и острому углу $\Delta DEH = \Delta AHB$. Поэтому $DE = AH = x$, а $CE = CD - DE = 2x$, откуда $DE : CE = 1:2$.

Ответ: $1:8$ или $1:2$.

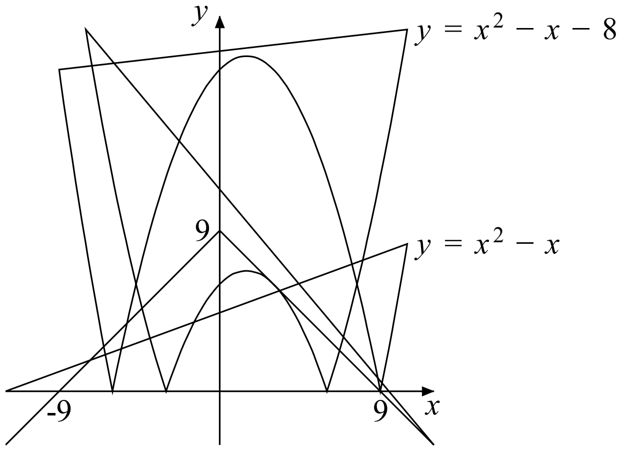
Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С4
3	Обосновано получен верный ответ
2	Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины
1	Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

3	*Максимальный балл*

C5 При каких а уравнение $|x^2 - x + a| + |x| = 9$ имеет ровно три корня?

Решение.

Запишем уравнение в виде $|x^2 - x + a| = 9 - |x|$. Построим график функций $y = |x^2 - x + a|$ и $y = 9 - |x|$. Из рисунка видно, что подходящих значений a ровно два — при одном из них график левой части проходит через точку $(9;\, 0)$, при втором — касается прямой $y = -x + 9$. В первом случае $a = -72$, во втором уравнение $-x^2 + x - a = 9 - x$ имеет единственный корень. Приравнивая дискриминант к нулю, находим: $a = -8$.



Ответ: $-8; -72$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С5
4	Обосновано получен верный ответ
3	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован, или в обосновании содержатся мелкие неточности
2	Ход решения в целом верен, но полученный ответ отличается от верного конечным числом значений параметра
1	Решение содержит верную геометрическую интерпретацию задачи или верный переход к равносильной системе без модулей, дальнейшие содержательные продвижения отсутствуют
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
4	*Максимальный балл*

C6 Числа от 2 до 11 записаны в строчку в некотором порядке. Всегда ли можно вычеркнуть несколько чисел так, чтобы осталось:

а) три числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

б) пять чисел в порядке возрастание или в порядке убывания?

в) четыре числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

Решение.

а) Да, всегда. Если 2 и 11 стоят не подряд, то они вместе с любым числом между ними дают нужную тройку. Если 2 и 11 стоят подряд, то либо перед ними, либо после них есть пара чисел. Добавляя к ней либо 2 либо 11 получим требуемое.

б) Если числа стоят например в порядке 8,7,9,5,11,2,3,6,4,10, то выбрать нельзя. В самом деле,

возрастающая последовательность из пяти чисел не может содержать более чем по одному числу из каждого из наборов $(8,7,5,2)$, $(9,6,4)$, $(11,10)$, (3).

Аналогично убывающая последовательность из пяти чисел не может содержать более чем по одному числу из каждого из наборов 8;9;11; 2,3,4,10; 5,6; 7;

в) Да, всегда. Запишем над каждым числом пару чисел $(a,\ b)$, где a – длина наибольшей возрастающей последовательности, начинающейся с этого числа, b – наибольшей убывающей. Все пары $(a,\ b)$ различны (если, например, первое число левее и меньше второго, то можно взять возрастающую последовательность со второго и удлинить ее первым числом, аналогично разбираются остальные варианты). Но пар из чисел от 1 до 3 всего 9 штук, а чисел 10, поэтому в каких-то парах попадутся числа, не меньшие четырех.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С6
4	Верно решены все три пункта
3	Верно решены два пункта: а) и б) или б) и в)
2	Верно решены два пункта: а) и в) или один пункт б)
1	Верно решен только один из пунктов: а) или в)
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
4	*Максимальный балл*