Решения и критерии оценивания выполнения заданий С1 — С6.

Вариант 1

С1. Дано уравнение $2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3$.

а) Решите данное уравнение.

б) Укажите корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. $2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3 \iff 2\cos^2 x + 4\sin x\cos x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x \iff$

$\iff 3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0 \iff 3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0$, откуда

$\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$.

Если $\operatorname{tg} x = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$;

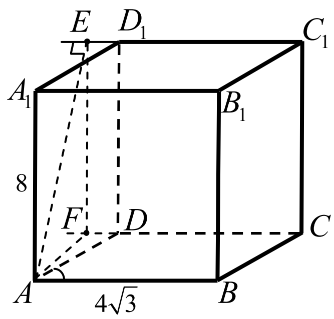
если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$, то $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k;\ k \in \mathbf{Z}$.

Из найденных решений промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат числа $-\frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \pi$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k;\ k \in \mathbf{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{4},\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \pi$.

Критерии оценивания выполнения задания С1	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{3}$ а угол BAD равен $60°$. Найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.



Решение 1. Опустим из точки A перпендикуляр AE на прямую C_1D_1 и проведем в плоскости грани CDD_1C_1 прямую EF, параллельную прямой D_1D. Так как $D_1D \perp (ACD)$, то и $EF \perp (ACD)$, а, значит, прямая AF является проекцией прямой AE на плоскость ABC. Поскольку $D_1C_1 \parallel DC$, то $AE \perp CD$, а, следовательно, и $AF \perp CD$ согласно теореме о трех перпендикулярах.

Далее находим:

1) из ΔADF: $AF = AD\sin\angle ADF = 4\sqrt{3}\sin 60° = 6$;

2) из ΔAEF: $AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = 10$.

Ответ: 10.

Критерии оценивания выполнения задания С2	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит переход к планиметрической задаче, но: - получен неверный ответ или решение не закончено; - при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} \le 54, \\ \log_6(x+1) - 2\log_{x+1} 6 + 1 > 0. \end{cases}$$

Решение.

Область определения системы задается условием $x > 0$.
На множестве $(0; +\infty)$ имеем:

1) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} \le 54 \Leftrightarrow \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} \le 54 \Leftrightarrow x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} \le 54 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^{\log_3 x} \le 54 \Leftrightarrow x^{\log_3 x} \le 27 \Leftrightarrow \log_3^2 x \le 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \le \log_3 x \le \sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{-\sqrt{3}} \le x \le 3^{\sqrt{3}}$. (1)

2) $\log_6(x+1) - 2\log_{x+1} 6 + 1 > 0 \Leftrightarrow \log_6(x+1) - \frac{2}{\log_6(x+1)} + 1 > 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$\log_6^2(x+1) + \log_6(x+1) - 2 > 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \log_6(x+1) > 1 \Leftrightarrow x > 5$. (2)

Так как $3^{\sqrt{3}} > 3^{1,5} = 3\sqrt{3} = \sqrt{27} > 5$, окончательно получаем $5 < x \le 3^{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\left(5; 3^{\sqrt{3}}\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания С3	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном из неравенств системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Замечание. Хотя неравенства системы можно решать независимо друг от друга, но при верном использовании для решения одного из них результатов, полученных при решении другого, следует считать, что «Обоснованно получен верный ответ» (**3 балла**).

С4. Дан треугольник *ABC*. Точка *E* на прямой *AC* выбрана так, что треугольник *ABE*, площадь которого равна 14, — равнобедренный с основанием *AE* и высотой *BD*. Найдите площадь треугольника *ABC*, если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$.

Решение. Введем следующие обозначения: $AB = BE = c$, $BC = a$, $BD = h$ (см.рисунок).

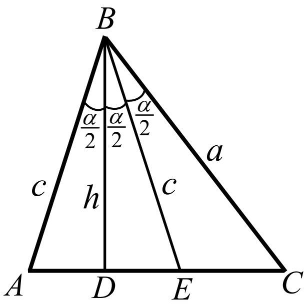


*Рис.*1

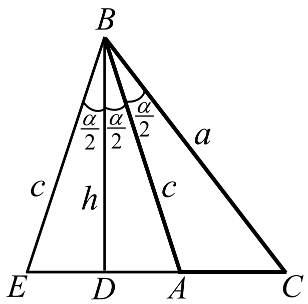


*Рис.*2

1 случай (точка *E* лежит между точками *A* и *C*, см. рисунок 1).

1) Треугольник *ABE* — равнобедренный, следовательно, $\angle ABD = \angle DBE = \frac{\alpha}{2}$, а, значит, и $\angle CBE = \frac{\alpha}{2}$.

2) Углы ABE и CBD треугольников ABE и CBD равны, значит, $\frac{S_{\Delta DBE}}{S_{\Delta CBE}} = \frac{hc}{ac} = \frac{h}{a} = \cos\alpha$, откуда $S_{\Delta CBE} = \frac{S_{\Delta DBE}}{\cos\alpha}$. Поскольку $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = \frac{7}{25}$, получаем $S_{\Delta CBE} = \frac{25}{7} S_{\Delta DBE} = \frac{25}{7}\cdot 7 = 25$.

Окончательно находим $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABE} + S_{\Delta CBE} = 14 + 25 = 39$.

2 случай (точка A лежит между точками E и C, см. рисунок 2).

Аналогично случаю 1 находим $S_{\Delta ABC} = \frac{25}{7} S_{\Delta DBE} = \frac{25}{7}\cdot 7 = 25$.

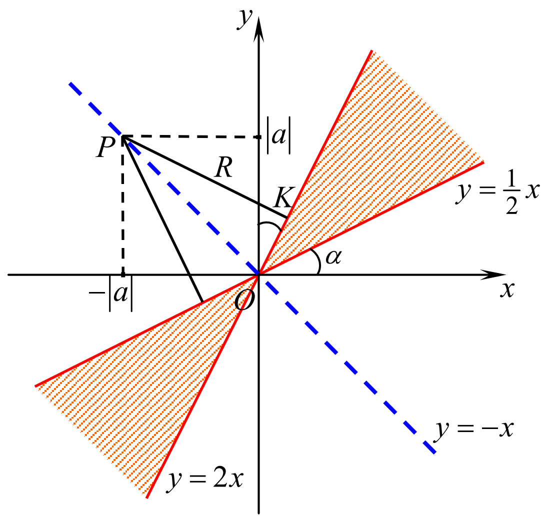
Ответ: 25 или 39.

Критерии оценивания выполнения задания С4	**Баллы**
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины или рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, но получен неправильный ответ из-за **одной** арифметической ошибки	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (y-2x)(2y-x)\le 0, & (1)\\ \sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2} = \frac{|a+1|}{\sqrt{5}} & (2)\end{cases}$$

имеет ровно два решения.



Решение. Неравенство (1) задает пару вертикальных углов на координатной плоскости Oxy (см. рисунок). Графиком уравнения (2) является окружность радиуса $R = \frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$, центр которой — точка $P(-a;a)$ — лежит на прямой $y=-x$. Поскольку оба графика симметричны относительно прямой $y=-x$, система будет иметь ровно два решения тогда и только тогда, когда расстояние PK от центра окружности до прямой $y=2x$ будет равняться радиусу $R = \frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$ данной окружности.

Из треугольника POK находим: $PK = PO\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, где $\mathrm{tg}\,\alpha$ — угловой коэффициент прямой $y=\frac{1}{2}x$. Таким образом, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, откуда $PK = PO\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) = |a|\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3|a|}{\sqrt{5}}$.

Окончательно получаем: $\frac{3|a|}{\sqrt{5}} = \frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$, $3a = \pm(a+1)$, $a=\frac{1}{2}$ или $a=-\frac{1}{4}$.

Ответ: $a=\frac{1}{2}$ или $a=-\frac{1}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания С5	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены искомые значения, возможно неверные, из-за одной допущенной вычислительной ошибки (описки)	3
С помощью верного рассуждения получено одно значение параметра (возможно неверное из-за одной вычислительной ошибки), а второе значение потеряно в результате ошибки (например «потеряны» модули)	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения графиков неравенства и уравнения (приведен правильный рисунок)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6. На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т.д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

Решение.

а) Заметим, что каждое число на доске будет делиться на 7. Действительно, исходное число делится на 7, в случае удвоения числа делящегося на 7, получится число, делящееся на 7. А при сложении чисел, делящихся на 7, также получится число, делящееся на 7. Таким образом, все числа на доске будут делиться на 7, а 2012 на 7 не делится, следовательно, оно не может появиться на доске.

б) Да, может. Пример: 7, 14 (удвоенное число 7), 14 (удвоенное число 7), 14 (удвоенное число 7), 14 (удвоенное число 7). Сумма полученных 5 чисел равна 63.

Замечание. В условии не сказано, что одно число нельзя удваивать несколько раз.

в) Как было замечено в пункте *а*, все числа на доске будут делиться на 7. Рассмотрим аналогичную задачу, разделив исходное число 7 и то число, которое нужно получить, т.е. 784, на 7. От этого количество операций не изменится. Таким образом, достаточно за наименьшее количество операций получить число 112, начав с числа 1.

Заметим, что наибольшее число, которое может получиться на доске через 6 минут, равно 64 (если Вася каждый раз будет удваивать текущее наибольшее число). Следовательно, если в первые 6 минут Вася каждый раз удваивал наибольшее число на доске, то число 112 нельзя получить за 7 минут: если число 64 удвоить, то получится 128, а если прибавить к нему число, не превосходящее 32, то 112 не получится.

В том случае, если в течение первых 6 минут Вася использовал хотя бы одно сложение вместо удвоения, то при первом использовании сложения наибольшее число, записанное на доске увеличилось не более, чем в полтора раза: действительно, в этом случае самый большой результат получится тогда, когда мы к максимальному на данный момент числу прибавим второе по величине, то есть, его половину (напомним, что мы рассматриваем первый случай сложения, то есть до этого были только удвоения). Таким образом, даже если в течение первых 7 минут сделано 6 удвоений и одно сложение (в некотором порядке), то наибольшее число, которое может получиться, равно $2^6 \cdot 1,5 = 96$, что меньше 112.

Итак, за 7 минут число 112 получить невозможно.

Приведем пример, как его получить за 8 минут:

$1 \to 1,2 \to 1,2,4 \to 1,2,4,8 \to 1,2,4,8,16 \to 1,2,4,8,16,32 \to 1,2,4,8,16,32,64 \to$

$\to 1,2,4,8,16,32,64,96$ $(96 = 64 + 32)$ $\to 1,2,4,8,16,32,64,96,112$ $(112 = 96 + 16)$.

Ответ: а) нет; б) да; в) 8 минут.

Критерии оценивания выполнения задания С6	**Баллы**
Верно выполнены все пункты: а), б), в)(оценка), в)(пример)	4
Верно выполнены три пункта из четырех: а), б), в)(оценка), в)(пример)	3
Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в)(оценка), в)(пример)	2
Верно выполнен один из пунктов: а), б), в)(оценка), в)(пример)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решения и критерии оценивания выполнения заданий С1 — С6.

Вариант 2

С1. Дано уравнение $6\sin^2 x+\sin 2x=2$.

а) Решите данное уравнение.

б) Укажите корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. $6\sin^2 x+\sin 2x=2 \;\Leftrightarrow\; 6\sin^2 x+2\sin x\cos x=2\sin^2 x+2\cos^2 x \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 2\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=0 \;\Leftrightarrow\; 2\,\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}\, x-1=0$, откуда
$\mathrm{tg}\, x=-1$ или $\mathrm{tg}\, x=\frac{1}{2}$.

Если $\mathrm{tg}\, x=-1$, то $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$;

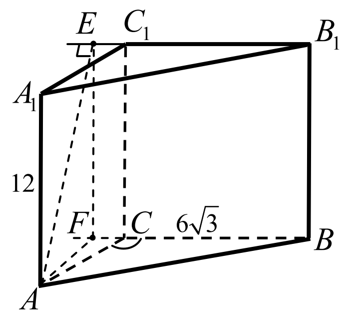
если $\mathrm{tg}\, x=\frac{1}{2}$, то $x=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k;\ k\in\mathbf{Z}$.

Из найденных решений промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат числа $\frac{7\pi}{4}$, $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+2\pi$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k;\ k\in\mathbf{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4},\ \mathrm{arctg}\frac{1}{2}+2\pi$.

Критерии оценивания выполнения задания С1	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, боковая сторона которого равна $6\sqrt{3}$ а угол ACB равен $120°$. Найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1, если известно, что боковое ребро данной призмы равно 12.



Решение 1. Опустим из точки A перпендикуляр AE на прямую C_1B_1 и проведем в плоскости грани CBB_1C_1 прямую EF, параллельную прямой C_1C. Так как $C_1C\perp(ABC)$, то и $EF\perp(ABC)$, а, значит, прямая AF является проекцией прямой AE на плоскость ABC. Поскольку $B_1C_1\parallel BC$, то $AE\perp CB$, а, следовательно, и $AF\perp CB$ согласно теореме о трех перпендикулярах.

Далее находим:

1) из ΔACF: $AF=AC\sin\angle ACF=6\sqrt{3}\sin 60°=9$;

2) из ΔAEF: $AE=\sqrt{AF^2+EF^2}=15$.

Ответ: 15.

Критерии оценивания выполнения задания С2	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит переход к планиметрической задаче, но: - получен неверный ответ или решение не закончено; - при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} \le 256, \\ \log_7(x+2) - 3\log_{x+2} 7 + 2 > 0. \end{cases}$$

Решение.

Область определения системы задается условием $x > 0$.
На множестве $(0; +\infty)$ имеем:

1) $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} \le 256 \Leftrightarrow \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x} + x^{\log_2 x} \le 256 \Leftrightarrow x^{\log_2 x} + x^{\log_2 x} \le 256 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^{\log_2 x} \le 256 \Leftrightarrow x^{\log_2 x} \le 128 \Leftrightarrow \log_2^2 x \le 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt{7} \le \log_2 x \le \sqrt{7} \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{7}} \le x \le 2^{\sqrt{7}}$. (1)

2) $\log_7(x+2) - 3\log_{x+2} 7 + 2 > 0 \Leftrightarrow \log_7(x+2) - \frac{3}{\log_7(x+2)} + 2 > 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \log_7^2(x+2) + 2\log_7(x+2) - 3 > 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \log_7(x+2) > 1 \Leftrightarrow x > 5$. (2)

Так как $2^{\sqrt{7}} > 2^{2,5} = 4\sqrt{2} = \sqrt{32} > 5$, окончательно получаем $5 < x \le 2^{\sqrt{7}}$.

Ответ: $\left(5; 2^{\sqrt{7}}\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания С3	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном из неравенств системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Замечание. Хотя неравенства системы можно решать независимо друг от друга, но при верном использовании для решения одного из них результатов, полученных при решении другого, следует считать, что «Обоснованно получен верный ответ» (**3 балла**).

C4. Дан треугольник *ABC*, площадь которого равна 55. Точка *E* на прямой *AC* выбрана так, что треугольник *ABE* — равнобедренный с основанием *AE* и высотой *BD*. Найдите площадь треугольника *ABE*, если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

Решение. Введем следующие обозначения: $AB = BE = c$, $BC = a$, $BD = h$ (см.рисунок).

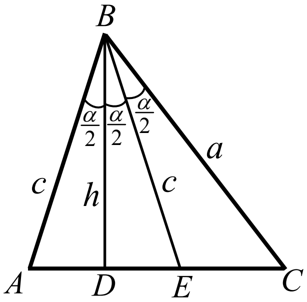


*Рис.*1

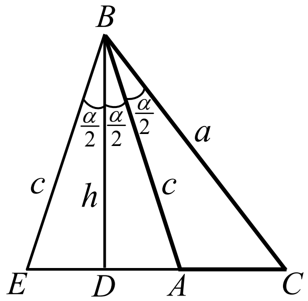


*Рис.*2

1 случай (точка *E* лежит между точками *A* и *C*, см. рисунок 1).

1) Треугольник *ABE* — равнобедренный, следовательно, $\angle ABD = \angle DBE = \frac{\alpha}{2}$, а, значит, и $\angle CBE = \frac{\alpha}{2}$.

2) Углы ABE и CBD треугольников ABE и CBD равны, значит, $\frac{S_{\Delta DBE}}{S_{\Delta CBE}}=\frac{hc}{ac}=\frac{h}{a}=\cos\alpha$, откуда $S_{\Delta DBE}=S_{\Delta CBE}\cos\alpha$. Поскольку $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}=\frac{3}{5}$, получаем $S_{\Delta DBE}=\frac{3}{5}S_{\Delta CBE}$, откуда $S_{\Delta ABE}=\frac{6}{5}S_{\Delta CBE}$, значит $S_{\Delta ABE}=\frac{6}{11}S_{\Delta ABC}=\frac{6}{11}\cdot 55=30$.

2 случай (точка A лежит между точками E и C, см. рисунок 2).

Аналогично случаю 1 находим $S_{\Delta ABE}=\frac{6}{5}S_{\Delta ABC}=\frac{6}{5}\cdot 55=66$.

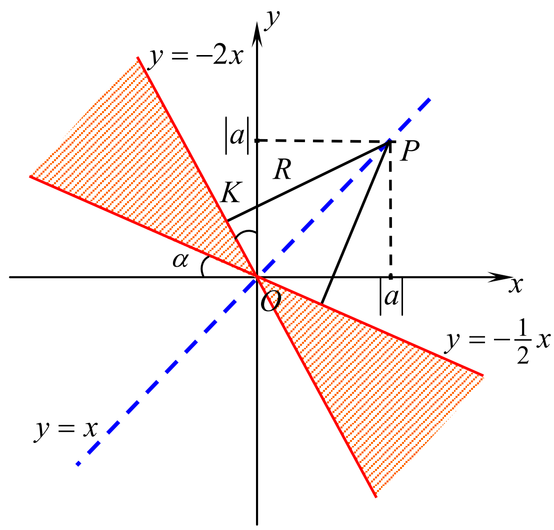
Ответ: 30 или 66.

Критерии оценивания выполнения задания С4	**Баллы**
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины или рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, но получен неправильный ответ из-за **одной** арифметической ошибки	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(y+2x)(2y+x)\le 0, & (1)\\ \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}=\dfrac{|a+1|}{\sqrt5} & (2)\end{cases}$$

имеет ровно два решения.



Решение. Неравенство (1) задает пару вертикальных углов на координатной плоскости Oxy (см. рисунок). Графиком уравнения (2) является окружность радиуса $R=\frac{|a+1|}{\sqrt5}$, центр которой — точка $P(a;a)$ — лежит на прямой $y=x$. Поскольку оба графика симметричны относительно прямой $y=x$, система будет иметь ровно два решения тогда и только тогда, когда расстояние PK от центра окружности до прямой $y=-2x$ будет равняться радиусу $R=\frac{|a+1|}{\sqrt5}$ данной окружности.

Из треугольника POK находим: $PK=PO\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, где $\mathrm{tg}(\pi-\alpha)$ — угловой коэффициент прямой $y=-\frac{1}{2}x$. Таким образом, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}=\frac{2}{\sqrt5}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt5}$, откуда

$$PK=PO\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)=|a|\sqrt2\cdot\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{2}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}\right)=\frac{3|a|}{\sqrt5}.$$

Окончательно получаем: $\frac{3|a|}{\sqrt5}=\frac{|a+1|}{\sqrt5}$, $3a=\pm(a+1)$, $a=\frac{1}{2}$ или $a=-\frac{1}{4}$.

Ответ: $a=\frac{1}{2}$ или $a=-\frac{1}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания С5	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены искомые значения, возможно неверные, из-за одной допущенной вычислительной ошибки (описки)	3
С помощью верного рассуждения получено одно значение параметра (возможно неверное из-за одной вычислительной ошибки), а второе значение потеряно в результате ошибки (например «потеряны» модули)	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения графиков неравенства и уравнения (приведен правильный рисунок)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6. На доске написано число 8. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т.д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 72?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 832?

Решение.

а) Заметим, что каждое число на доске будет делиться на 8. Действительно, исходное число делится на 8, в случае удвоения числа делящегося на 8, получится число, делящееся на 8. А при сложении чисел, делящихся на 8, также получится число, делящееся на 8. Таким образом, все числа на доске будут делиться на 8, а 2012 на 8 не делится, следовательно, оно не может появиться на доске.

б) Может. Пример: 8, 16 (удвоенное число 8), 16 (удвоенное число 8), 16 (удвоенное число 8), 16 (удвоенное число 8). Сумма полученных 5 чисел равна 72.

Замечание. В условии не сказано, что одно число нельзя удваивать несколько раз.

в) Как было замечено в пункте *а*, все числа на доске будут делиться на 8. Рассмотрим аналогичную задачу, разделив исходное число 8 и то число, которое нужно получить, т.е. 832, на 8. От этого количество операций не изменится. Таким образом, достаточно за наименьшее количество операций получить число 104, начав с числа 1.

Заметим, что наибольшее число, которое может получиться на доске через 6 минут, равно 64 (если Вася каждый раз будет удваивать текущее наибольшее число). Следовательно, если в первые 6 минут Вася каждый раз удваивал наибольшее число на доске, то число 104 нельзя получить за 7 минут: если число 64 удвоить, то получится 128, а если прибавить к нему число, не превосходящее 32, то 104 не получится.

В том случае, если в течение первых 6 минут Вася использовал хотя бы одно сложение вместо удвоения, то при первом использовании сложения наибольшее число, записанное на доске увеличилось не более, чем в полтора раза: действительно, в этом случае самый большой результат получится тогда, когда мы к максимальному на данный момент числу прибавим второе по величине, то есть, его половину (напомним, что мы рассматриваем первый случай сложения, то есть до этого были только удвоения). Таким образом, даже если в течение первых 7 минут сделано 6 удвоений и одно сложение (в некотором порядке), то наибольшее число, которое может получиться, равно $2^6 \cdot 1,5 = 96$, что меньше 104.

Итак, за 7 минут число 104 получить невозможно.

Приведем пример, как его получить за 8 минут:

$1 \to 1,2 \to 1,2,4 \to 1,2,4,8 \to 1,2,4,8,16 \to 1,2,4,8,16,32 \to 1,2,4,8,16,32,64 \to$

$\to 1,2,4,8,16,32,64,96$ $(96 = 64 + 32) \to 1,2,4,8,16,32,64,96,104$ $(104 = 96 + 8)$.

Ответ: а) нет; б) да; в) 8 минут.

Критерии оценивания выполнения задания С6	**Баллы**
Верно выполнены все пункты: а), б), в)(оценка), в)(пример)	4
Верно выполнены три пункта из четырех: а), б), в)(оценка), в)(пример)	3
Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в)(оценка), в)(пример)	2
Верно выполнен один из пунктов: а), б), в)(оценка), в)(пример)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4