Вариант № 2

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите уравнение $2\cos 2x+4\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0$ и укажите те из его корней, которые принадлежат отрезку $\left[-3\pi;-\pi\right]$.

Решение.

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$; $\cos 2x=2\cos^2 x-1$. Поэтому уравнение можно переписать в виде $4\cos^2 x-4\cos x-3=0$. Решив уравнение как квадратное относительно $\cos x$, получим, что $\cos x=-0{,}5$ или $\cos x=1{,}5$. Последнее уравнение корней не имеет, поскольку $|\cos x|\le 1$, а из уравнения $\cos x=-0{,}5$ находим $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\pi\right]$.

Из чисел вида $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ данному отрезку принадлежит лишь $x=-\frac{4\pi}{3}$ (при $n=-1$), так как при $n\ge 0$ получим, что $x>0$, а при $n\le -2$ получим, что $x<-3\pi$.

Из чисел вида $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ данному отрезку принадлежит лишь $x=-\frac{8\pi}{3}$ (при $k=-1$), так как при $k\ge 0$ получим, что $x>-\pi$, а при $k\le -2$ получим, что $x<-4\pi$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. $-\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{8\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно решено уравнение и произведён отбор корней	2
Верно решено уравнение, но не произведён или не обоснован отбор корней, принадлежащих данному отрезку, или верно указаны все корни, принадлежащие данному отрезку, но решение простейших тригонометрических уравнений не доведено до получения корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

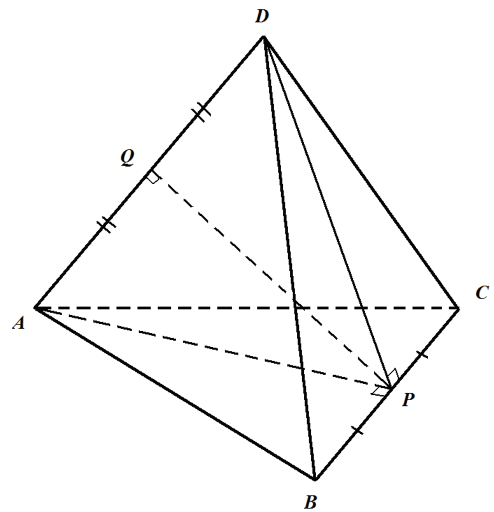
С2 В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер $AB=AC=DB=DC=13$ см, $DA=6$ см, $BC=24$ см. Найдите расстояние между прямыми DA и BC.

Решение.

Пусть P — середина BC, тогда $AP\perp BC$, $DP\perp BC$, поэтому прямая BC перпендикулярна плоскости APD.

$AP=DP$ (поскольку ABC и BDC — равные равнобедренные треугольники). Следовательно, высота и медиана PQ треугольника APD и будет искомым перпендикуляром.

Найдём $AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$ (по теореме Пифагора для треугольника ABP). Тогда $PQ=\sqrt{AP^2-AQ^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ (по теореме Пифагора для треугольника PAQ).



Ответ: 4 см.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^{x+1} - 18 \cdot 2^{x+2} + 128 \le 0, \\ 2\log_3 \dfrac{x-2}{x-3{,}3} + \log_3 (x-3{,}3)^2 \ge 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство системы, разделив обе его части на число 4, приведя к виду $\left(2^x\right)^2 - 18 \cdot 2^x + 32 \le 0$ и сделав замену переменной $t = 2^x,\ t > 0$. Получим квадратное неравенство $t^2 - 18t + 32 \le 0$, решив которое, найдём $2 \le t \le 16$. Значит, $2 \le 2^x \le 16$, или $2^1 \le 2^x \le 2^4$, откуда $x \in [1;\ 4]$.

Решим второе неравенство системы, перейдя сначала к равносильному неравенству $\log_3 \left(\dfrac{x-2}{x-3{,}3}\right)^2 + \log_3 (x-3{,}3)^2 \ge 0$ при условии $\dfrac{x-2}{x-3{,}3} > 0$, а затем, преобразовав сумму логарифмов в логарифм произведения и сократив дробь, к равносильной ему системе неравенств $\begin{cases} \log_3 (x-2)^2 \ge 0, \\ \dfrac{x-2}{x-3{,}3} > 0. \end{cases}$ Неравенство $\log_3 (x-2)^2 \ge 0$ равносильно неравенству $(x-2)^2 \ge 1$, решив которое, получим $x \in (-\infty;\ 1] \cup [3;\ +\infty)$. Решение второго неравенства последней системы: $(-\infty;\ 2) \cup (3{,}3;\ +\infty)$. Решение последней системы: $x \in (-\infty;\ 1] \cup (3{,}3;\ +\infty)$.

Решение данной системы: $\{1\} \cup (3{,}3;\ 4]$.

Ответ: $\{1\} \cup (3{,}3;\ 4]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Для обоих неравенств системы обоснованно получены верные ответы, но решение системы не найдено или найдено неверно	2
Для одного из двух неравенств системы обоснованно получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

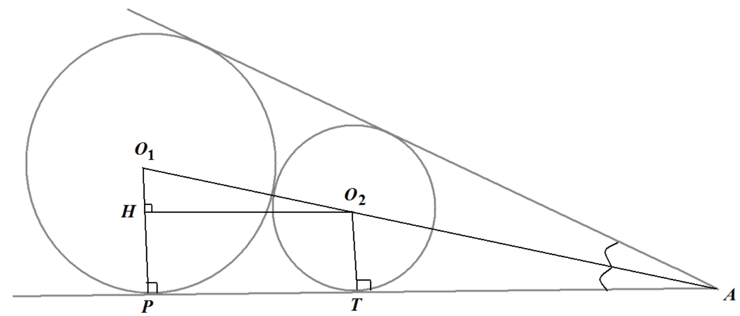
С4 Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 150 см, косинус угла при его основании равен $\dfrac{7}{8}$. Найдите радиус окружности, касающейся вписанной окружности этого треугольника и двух его сторон.

Решение.

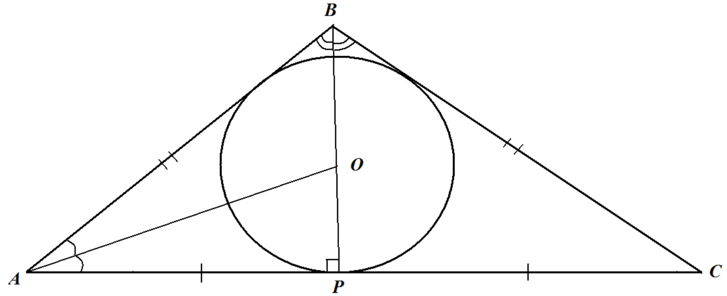
Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть в угол A, равный α, вписана окружность ω_1 радиуса R с центром O_1. Окружность ω_2 радиуса r с центром O_2, лежащим на отрезке AO_1, касается сторон угла A и окружности ω_1. Выразим r через R и α.

Пусть ω_1 касается одной из сторон угла A в точке P, а ω_2 касается отрезка AP в точке T. Опустим из O_2 перпендикуляр O_2H на O_1P. В треугольнике O_1O_2H имеем $O_1O_2 = R + r$, $O_1H = O_1P - HP = O_1P - O_2T = R - r$. Так как AO_1 — биссектриса угла A, $\angle O_1O_2H = \angle O_1AP = \dfrac{\alpha}{2}$.

Значит, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{R-r}{R+r}$, откуда находим $r = R \cdot \dfrac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}$.



Перейдём к решению задачи. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник, в котором $AB = BC$, BP — высота, медиана и биссектриса треугольника, точка O — центр вписанной окружности треугольника. Существуют три окружности, удовлетворяющие условию задачи. Радиусы двух из них (вписанных в углы A и C) равны. Поэтому достаточно найти радиусы окружностей, вписанных в углы A и B, и касающихся вписанной окружности треугольника ABC.



Для окружности, касающейся окружности, вписанной в треугольник ABC, и сторон угла A имеем $r_1 = R\cdot\dfrac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}$. Но

$\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{7}{8}}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{4}$. Поэтому $r_1 = 150\cdot\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = 90$.

Для окружности, касающейся окружности, вписанной в треугольник ABC, и сторон угла B имеем $r_2 = R\dfrac{1-\sin\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}}$. Но $\sin\dfrac{B}{2} = \cos A = \dfrac{7}{8}$. Поэтому

$r_2 = 150\cdot\dfrac{1-\frac{7}{8}}{1+\frac{7}{8}} = 10$.

Ответ: 10 см или 90 см.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + a = 4\cos x, \\ \sqrt{y} + z^2 = a, \\ (a-2)^2 = |z^2 - 2z| + |\sin 2x| + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

Решение.

Поскольку $|y| \ge 0$, $\cos x \le 1$, из первого уравнения системы следует, что $a \le 4$. Поскольку $\sqrt{y} + z^2 \ge 0$, из второго уравнения системы следует, что $a \ge 0$. Таким образом, $0 \le a \le 4$. Приведём третье уравнение системы к виду $a^2 - 4a = |z^2 - 2z| + |\sin 2x|$. Поскольку $|z^2 - 2z| + |\sin 2x| \ge 0$, из последнего уравнения следует, что $a^2 - 4a \ge 0$, откуда $a \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$. Учитывая неравенство, $0 \le a \le 4$, получаем, что $a = 0$ или $a = 4$.

Пусть $a = 0$. Тогда из второго уравнения данной системы получим $y = z = 0$. Поэтому первое уравнение системы примет вид $\cos x = 0$, откуда $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При $a = 0$ и $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $y = z = 0$ третье уравнение системы, очевидно, обращается в верное числовое равенство.

Пусть $a = 4$. Тогда левая часть первого уравнения данной системы не меньше 4, а правая — не больше 4. Равенство возможно, только если $y^2 = 0$ и $\cos x = 1$, откуда $y = 0$, $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда второе уравнение данной системы принимает вид $z^2 = 4$, и значит, $z = \pm 2$. При $a = 4$ и $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, последнее уравнение данной системы принимает вид $|z^2 - 2z| = 0$. Из двух значений $z = \pm 2$, только $z = 2$ является корнем уравнения $|z^2 - 2z| = 0$.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; 0; 0\right)$ при $a = 0$, где $n \in \mathbb{Z}$; $(2\pi k; 0; 2)$ при $a = 4$, где $k \in \mathbb{Z}$; при прочих a решений нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обосновано получены оба значения параметра. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы в обоснованиях, либо допущены ошибки в нахождении x	3

Верно записаны все условия на параметр a, откуда могут быть получены искомые значения, но решение не доведено до конца или решено неверно	2
Найдено хотя бы одно из значений параметра и получено верное решение системы для найденного значения параметра	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6

На листе бумаги написаны в строчку 13 единиц.

а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

б) Докажите, что если единицы, стоящие на чётных местах, заменить семёрками, всё равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

в) Докажите, что между любыми 13 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

Решение.

Для доказательства пунктов *а)* и *б)* достаточно привести примеры расстановки знаков сложения, умножения и скобок для данных наборов чисел. Такая расстановка в каждом случае не является единственной. Заметим, что $108 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2$.

а) Например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1+1) = 108$.

б) Например, $(1+7+1)\cdot(7+1+7)\cdot(1+7+1)\cdot(7+1+7+1)$. Очевидно, что каждый из первых трёх сомножителей делится на 3, а последний делится на 4, поэтому всё произведение делится на $3\cdot 3\cdot 3\cdot 4 = 108$.

в) Любой набор из 13 натуральных чисел $a_1, a_2, ..., a_{13}$, можно разбить на три группы из трех чисел и две группы из двух чисел, заключив их в скобки и поставив между скобками знаки умножения:

$$(a_1\, a_2\, a_3)\cdot(a_4\, a_5\, a_6)\cdot(a_7\, a_8\, a_9)\cdot(a_{10}\, a_{11})\cdot(a_{12}\, a_{13}).$$

Покажем, что между любыми двумя натуральными числами можно поставить знак сложения или умножения так, что результат будет делиться на 2.

Если одно из двух чисел чётное, то поставим между ними знак умножения. Результат будет делиться на 2.

Если оба числа нечётные, то поставим между ними знак сложения. Результат будет делиться на 2.

Покажем, что между любыми тремя натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что результат будет делиться на 3.

Если одно из трёх чисел делится на 3, то поставим между числами знаки умножения. Результат будет делиться на 3.

Предположим, что все эти числа не делятся на 3.

Если у каких-то двух подряд идущих чисел остатки от деления на 3 различны (один равен 1, другой равен 2), то поставим между ними знак сложения, заключим эту пару в скобки и поставим знак умножения между этими скобками и оставшимся из трёх чисел. Сумма двух чисел в скобках делится на 3, поэтому произведение этой суммы на оставшееся число также будет делиться на 3.

Если у каждой пары подряд идущих чисел остатки от деления на 3 одинаковы, то у всех трёх чисел одинаковые остатки от деления на 3. Поставим между этими числами знаки сложения. Результат будет делиться на 3.

Таким образом, расставив в трёх группах из трёх чисел заданные знаки так, что результат делится на 3, а в двух группах из двух чисел так, что результат делится на 2, получим, что результат выполнения всех операций будет делиться на $3\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 108$.

Ответ: *а*) например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1+1)$;

б) например, $(1+7+1)\cdot(7+1+7)\cdot(1+7+1)\cdot(7+1+7+1)$.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены все три пункта *а*), *б*), *в*)	4
Верно выполнены пункты *а*) и *б*), пункт *в*) выполнен с пробелами в обосновании; либо верно выполнен только пункт *в*)	3
Верно выполнены два пункта *а*) и *б*)	2
Верно выполнен один пункт из пунктов *а*) или *б*)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4