Тренировочная работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

14 марта 2013 года

10 класс

Вариант МА0201

Район

Город (населённый пункт).

Школа.

Класс

Фамилия

Имя.

Отчество

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (C1–C4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

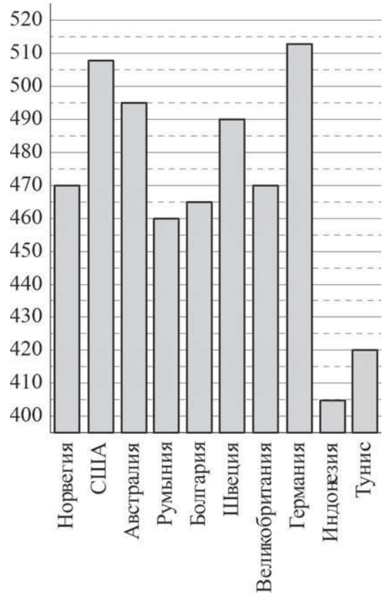
Часть 1

Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Поезд Новосибирск-Красноярск отправляется в 14:09, а прибывает в 3:09 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

Ответ:

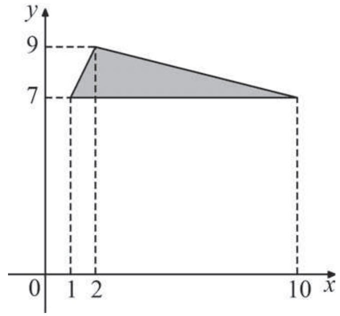
B2 На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале).



По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл отличается от среднего балла болгарских школьников менее чем на 15 (саму Болгарию не считайте).

Ответ:

B3 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1;7), (10;7), (2;9).



Ответ:

B4 Автомобильный журнал определяет рейтинги автомобилей на основе оценок безопасности S, комфорта C, функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый отдельный показатель оценивается читателями журнала по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите, какой автомобиль имеет наивысший рейтинг. В ответ запишите значение этого рейтинга.

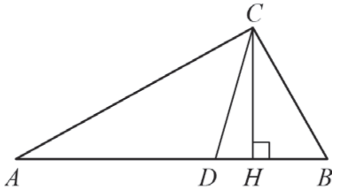
Модель автомобиля	**Безопасность**	**Комфорт**	**Функциональность**	**Качество**	**Дизайн**
А	4	2	5	5	2
Б	4	1	1	2	4
В	5	5	4	1	1

Ответ:

B5 Найдите корень уравнения $\sqrt{13 + 4x} = 7$.

Ответ:

B6 Острые углы прямоугольного треугольника равны 59° и 31°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

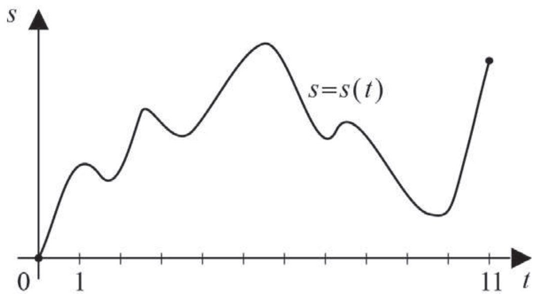


Ответ:

B7 Найдите значение выражения $\frac{28\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\sin 40^\circ}$.

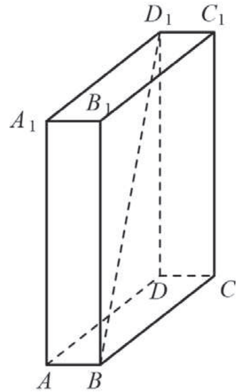
Ответ:

B8 Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 11 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат – расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



Ответ:

B9 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $CC_1 = 9$, $AB = 2$, $B_1C_1 = 6$. Найдите длину диагонали BD_1.

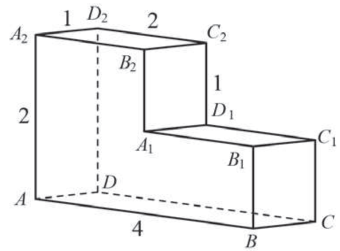


Ответ:

B10 Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны, включая Россию. В первый день 24 выступления, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Ответ:

B11 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ:

B12 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{25} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность $P = 1,425 \cdot 10^{26}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Ответ:

B13 Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ:

B14 Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 + 6x + 29}$.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi; 3\pi]$.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро равно 8 и высота пирамиды равна $2\sqrt{15}$. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через прямую BD и середину F ребра MC.

C3 Решите систему неравенств: $$\begin{cases} \dfrac{3}{3^{x+1} - 2} - \dfrac{2(3^{x+3} - 9)}{7(3^{x+1} - 3)} \le -3, \\ \left(\dfrac{1}{x^2 + 2x - 2} + x^2 + 2x - 2\right)^2 \ge 4. \end{cases}$$

C4 Угол C треугольника ABC равен 60°, D – отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 1 : 2$. Найдите угол A.

Тренировочная работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

14 марта 2013 года

10 класс

Вариант МА0202

Район

Город (населённый пункт).

Школа.

Класс

Фамилия

Имя.

Отчество

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (C1–C4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

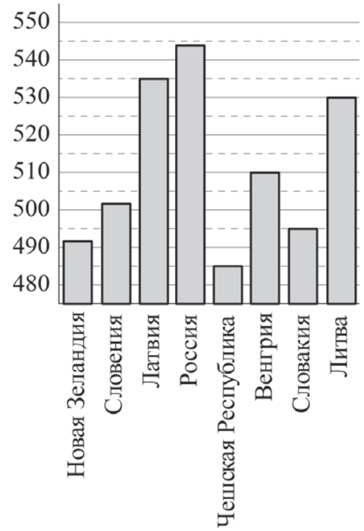
Часть 1

Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 В квартире, где проживает А., установлен прибор учёта расхода горячей воды (счётчик). 1 марта счётчик показывал расход 879 куб. м воды, а 1 апреля – 893 куб. м. Какую сумму должен заплатить А. за горячую воду за март, если цена за один куб. м горячей воды составляет 75 р.? Ответ дайте в рублях.

Ответ:

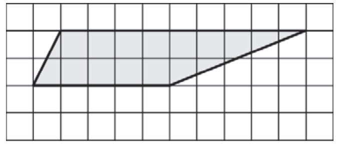
B2 На диаграмме показан средний балл участников 8 стран в тестировании учащихся 4-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале).



По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл выше, чем в Словакии.

Ответ:

B3 Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ:

B4 Для транспортировки 5 тонн груза на 350 км можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешевую перевозку?

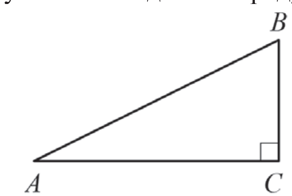
Перевозчик	**Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 10 км)**	**Грузоподъёмность автомобилей (тонн)**
А	80	1,6
Б	110	2,2
В	140	2,8

Ответ:

B5 Решите уравнение $\dfrac{x-5}{4x+1} = \dfrac{x-5}{3x-2}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите бóльший из корней.

Ответ:

B6 Один острый угол прямоугольного треугольника на $63°$ больше другого. Найдите бóльший острый угол. Ответ дайте в градусах.

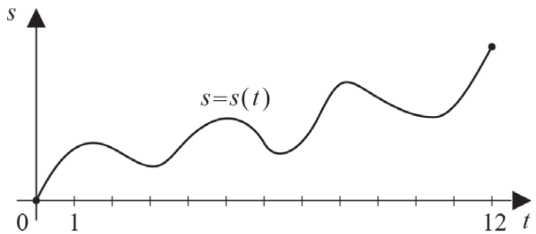


Ответ:

B7 Найдите значение выражения $\dfrac{7\left(\sin^2 11^\circ - \cos^2 11^\circ\right)}{\cos 22^\circ}$.

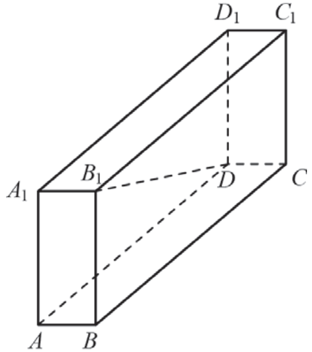
Ответ: ______

B8 Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат – расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



Ответ: ______

B9 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $CC_1 = 4$, $A_1B_1 = 1$, $BC = 8$. Найдите длину диагонали DB_1.

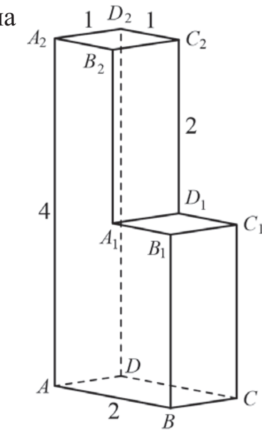


Ответ: ______

B10 На семинар приехали 4 учёных из Финляндии, 5 из Румынии и 7 из Италии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что пятнадцатым окажется доклад учёного из Финляндии.

Ответ: ______

B11 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ: ______

B12 Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_п = 15\,°C$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_в = 89\,°C$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры T (°C), причём $x = \alpha \dfrac{cm}{\gamma} \log_2 \dfrac{T_в - T_п}{T - T_п}$ (м), где $c = 4200 \dfrac{Дж}{кг \cdot °C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \dfrac{Вт}{м \cdot С}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 2{,}3$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 138 м?

Ответ: ______

B13 Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 40% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Ответ: ______

B14 Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2+4x+26}$.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С4 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде *MABCD* боковое ребро равно 18 и высота пирамиды равна $8\sqrt{5}$. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через прямую *AC* и середину *L* ребра *MB*.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{3^x-2}-\dfrac{2(3^{x+2}-9)}{7(3^x-3)}\le -3, \\ \left(\dfrac{1}{10x^2-21x+9}+10x^2-21x+9\right)^2\ge 4. \end{cases}$$

C4 Угол *C* треугольника *ABC* равен 30°, *D* – отличная от *A* точка пересечения окружностей, построенных на сторонах *AB* и *AC* как на диаметрах. Известно, что *DB* : *DC* = 1 : 4. Найдите угол *A*.

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	13
B2	3
B3	9
B4	0,76
B5	9
B6	14
B7	14

№ задания	Ответ
B8	8
B9	11
B10	0,26
B11	6
B12	5000
B13	12
B14	-3

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	1050
B2	5
B3	14
B4	9800
B5	5
B6	76,5
B7	-7

№ задания	Ответ
B8	6
B9	9
B10	0,25
B11	6
B12	52
B13	50
B14	-2

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi; 3\pi]$.

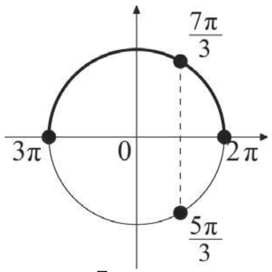
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x\cos x = \sin x;\quad \sin x(2\cos x - 1) = 0;\quad \sin x = 0 \text{ или } \cos x = \frac{1}{2};$$

$$x = \pi k \text{ или } x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi; 3\pi]$: $2\pi,\ \frac{7\pi}{3},\ 3\pi.$



Ответ: а) $\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi, \frac{7\pi}{3}, 3\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро равно 8 и высота пирамиды равна $2\sqrt{15}$. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через прямую BD и середину F ребра MC.

Решение.

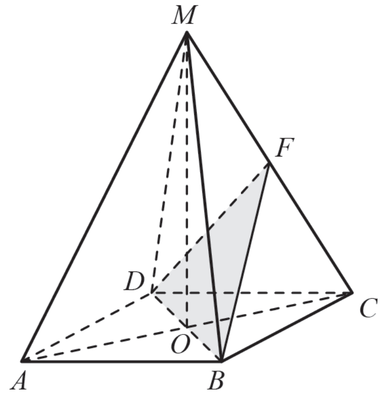
Сечение BDF – равнобедренный треугольник, поскольку в правильной пирамиде боковые грани равны и поэтому $BF = DF$.

Пусть O – середина BD. Тогда OF– высота ΔBDF. В прямоугольном треугольнике MOC отрезок OF – медиана и поэтому $OF = \frac{1}{2}MC = 4$.

Основание правильной пирамиды $MABCD$ – квадрат $ABCD$ и поэтому

$$BD = 2OC = 2\sqrt{MC^2 - MO^2} = 2\sqrt{64 - 60} = 4.$$

Следовательно, площадь $S_{BDF} = \frac{1}{2}BD \cdot OF = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$



Ответ: 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{3}{3^{x+1}-2}-\dfrac{2(3^{x+3}-9)}{7(3^{x+1}-3)} \le -3, \\ \left(\dfrac{1}{x^2+2x-2}+x^2+2x-2\right)^2 \ge 4. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделаем замену $z=3^{x+1}$, получаем:

$$\frac{3}{z-2}-\frac{18(z-1)}{7(z-3)} \le -3;$$

$\dfrac{(z-1)(z-9)}{(z-2)(z-3)} \le 0;\quad 1 \le z < 2$ или $3 < z \le 9$.

Обратная замена даёт: $-1 \le x < \log_3 \dfrac{2}{3}$ или $0 < x \le 1$.

Решим второе неравенство. Сделаем замену $t = x^2+2x-2$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t}+t\right)^2 \ge 4;\quad \left(\frac{1}{t}-t\right)^2 \ge 0;\quad t \ne 0.$$

Значит, $x \ne -1 \pm \sqrt{3}$. Поскольку $-1-\sqrt{3} < -1$ и $0 < -1+\sqrt{3} < 1$,
получаем решение системы:

$$-1 \le x < \log_3 \frac{2}{3};\quad 0 < x < -1+\sqrt{3} \text{ или } -1+\sqrt{3} < x \le 1.$$

Ответ: $\left[-1,\ \log_3 \frac{2}{3}\right),\ \left(0;\ -1+\sqrt{3}\right),\ \left(-1+\sqrt{3};\ 1\right].$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Угол C треугольника ABC равен 60°, D – отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 1 : 2$. Найдите угол A.

Решение.

Точка D лежит на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle ADB = 90^\circ$. Аналогично, $\angle ADC = 90^\circ$. Следовательно, точка D лежит на прямой BC.

Возможны два случая: точка D лежит либо на отрезке BC (рис.1), либо на продолжении отрезка BC за точку B (рис.2). Точка D не может лежать на продолжении отрезка BC за точку C, так как угол ACB – острый.

Положим $DB = t$, $DC = 2t$. Из прямоугольных треугольников ADC и ABD находим, что $AD = CD \cdot \mathrm{tg}60^\circ = 2t\sqrt{3}$ и $AB = t\sqrt{13}$.

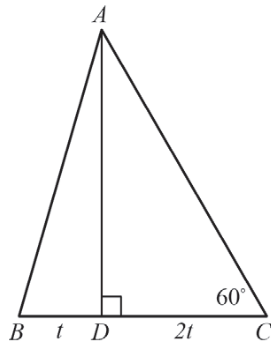


Рис.1

Рассмотрим первый случай. Легко видеть, что $BC = 3t$.

По теореме синусов $\dfrac{\sin A}{BC} = \dfrac{\sin C}{AB}$ или $\dfrac{\sin A}{3t} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t\sqrt{13}}$, отсюда $\sin A = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \dfrac{3\sqrt{39}}{26}$.

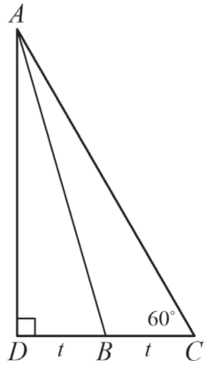


Рис. 2

Во втором случае $BC = t$, $\frac{\sin A}{t} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t\sqrt{13}}$, откуда $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{39}}{26}$.

Ответ: $\arcsin\frac{3\sqrt{39}}{26}$ или $\arcsin\frac{\sqrt{39}}{26}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

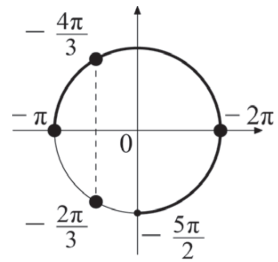
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x\cos x = -\sin x;\ \sin x(2\cos x + 1) = 0;\quad \sin x = 0 \text{ или } \cos x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \pi k \quad \text{или} \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$: -2π, $-\frac{4\pi}{3}$, $-\pi$.



Ответ: а) $\frac{2\pi k}{3}$, $\pi + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро равно 18 и высота пирамиды равна $8\sqrt{5}$. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AC и середину L ребра MB.

Решение.

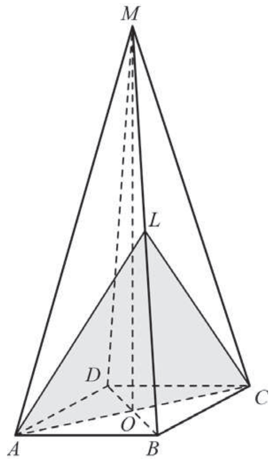
Сечение ACL – равнобедренный треугольник, поскольку в правильной пирамиде боковые грани равны и поэтому $AL = CL$.

Пусть O – середина AC. Тогда OL – высота ΔACL. В прямоугольном треугольнике MOB отрезок OL – медиана и поэтому $OL = \frac{1}{2}MB = 9$.

Основание правильной пирамиды $MABCD$ – квадрат $ABCD$ и поэтому

$$AC = 2OB = 2\sqrt{MB^2 - MO^2} = 2\sqrt{324 - 320} = 4.$$

Следовательно, площадь $S_{ACL} = \frac{1}{2}AC \cdot OL = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 18$.



Ответ: 18.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{3}{3^x - 2} - \dfrac{2(3^{x+2} - 9)}{7(3^x - 3)} \le -3, \\ \left(\dfrac{1}{10x^2 - 21x + 9} + 10x^2 - 21x + 9\right)^2 \ge 4. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделаем замену $z = 3^x$, получаем:

$$\frac{3}{z-2} - \frac{18(z-1)}{7(z-3)} \le -3;\quad \frac{(z-1)(z-9)}{(z-2)(z-3)} \le 0;\quad 1 \le z < 2 \text{ или } 3 < z \le 9.$$

Обратная замена даёт: $0 \le x < \log_3 2$ или $1 < x \le 2$.

Решим второе неравенство. Сделаем замену $t = 10x^2 - 21x + 9$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t} + t\right)^2 \ge 4; \left(\frac{1}{t} - t\right)^2 \ge 0; t \ne 0.$$

Значит, $x \ne 0{,}6$ и $x \ne 1{,}5$, причём $0 < 0{,}6 < \log_3 2$ и $1 < 1{,}5 < 2$.

Таким образом, получаем решение системы:

$$0 \le x < 0{,}6;\quad 0{,}6 < x < \log_3 2;\quad 1 < x < 1{,}5 \text{ или } 1{,}5 < x \le 2.$$

Ответ: $[0,\ 0{,}6)$, $(0{,}6;\ \log_3 2)$, $(1,\ 1{,}5)$, $(1{,}5,\ 2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Угол C треугольника ABC равен 30°, D – отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 1 : 4$. Найдите угол A.

Решение.

Точка D лежит на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle ADB = 90^\circ$. Аналогично, $\angle ADC = 90^\circ$. Следовательно, точка D лежит на прямой BC.

Возможны два случая: точка D лежит либо на отрезке BC (рис.1), либо на продолжении отрезка BC за точку B (рис.2). Точка D не может лежать на продолжении отрезка BC за точку C, так как угол ACB – острый.

Положим $DB = t$, $DC = 4t$. Из прямоугольных треугольников ADC и ABD находим, что

$$AD = CD \cdot \mathrm{tg}30^\circ = \frac{4}{\sqrt{3}}t \quad \text{и} \quad AB = \sqrt{\frac{19}{3}} \cdot t.$$

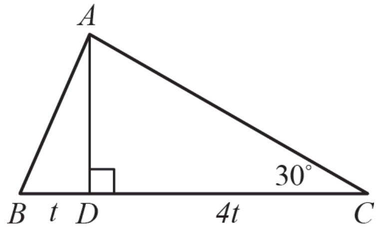


Рис. 1

Рассмотрим первый случай. Легко видеть, что $BC = 5t$. По теореме синусов $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB}$, или $\frac{\sin A}{5t} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{19}{3}}t}$, откуда $\sin A = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{19}} = \frac{5\sqrt{57}}{38}$.

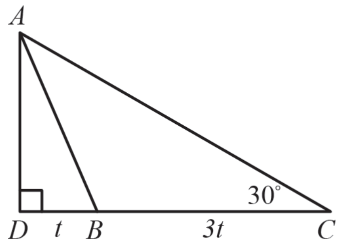


Рис. 2

Во втором случае $BC = 3t$, $\frac{\sin A}{3t} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{19}{3}} \cdot t}$, откуда $\sin A = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{19}} = \frac{3\sqrt{57}}{38}$.

Ответ: $\arcsin\frac{5\sqrt{57}}{38}$ или $\arcsin\frac{3\sqrt{57}}{38}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Тренировочная работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

14 марта 2013 года

10 класс

Вариант МА0203

Район
Город (населённый пункт).
Школа.
Класс
Фамилия
Имя.
Отчество

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (C1–C4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

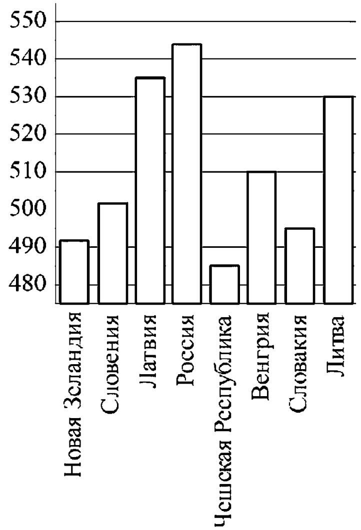
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Поезд Новосибирск-Красноярск отправляется в 14:09, а прибывает в 3:09 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

Ответ:

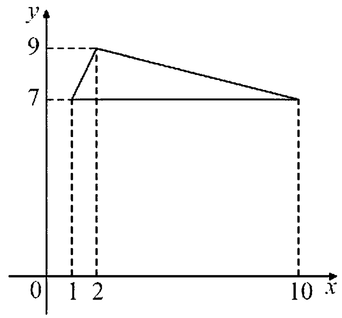
B2 На диаграмме показан средний балл участников 8 стран в тестировании учащихся 4-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале).



По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл выше, чем в Словакии.

Ответ:

B3 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1;7), (10;7), (2;9).



Ответ:

B4 Для транспортировки 5 тонн груза на 350 км можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешевую перевозку?

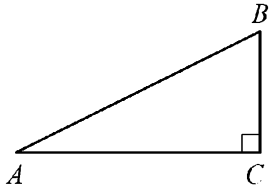
Перевозчик	**Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 10 км)**	**Грузоподъёмность автомобилей (тонн)**
А	80	1,6
Б	110	2,2
В	140	2,8

Ответ:

B5 Найдите корень уравнения $\sqrt{13+4x} = 7$.

Ответ:

B6 Один острый угол прямоугольного треугольника на 63° больше другого. Найдите бóльший острый угол. Ответ дайте в градусах.

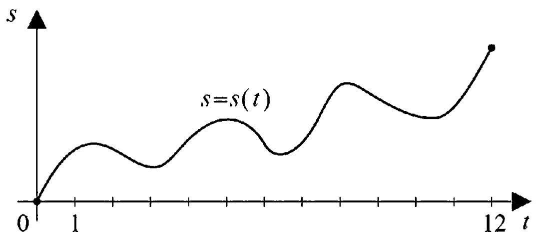


Ответ:

B7 Найдите значение выражения $\dfrac{28\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\sin 40^\circ}$.

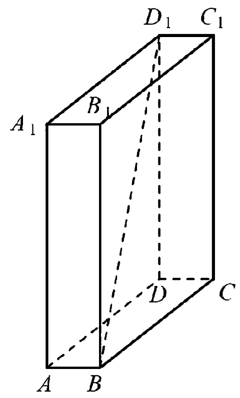
Ответ:

B8 Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат – расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



Ответ:

B9 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $CC_1 = 9$, $AB = 2$, $B_1C_1 = 6$. Найдите длину диагонали BD_1.

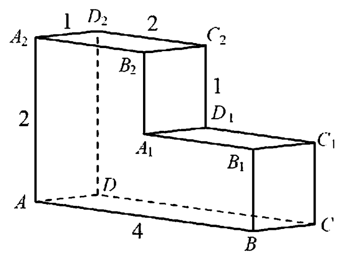


Ответ:

B10 На семинар приехали 4 учёных из Финляндии, 5 из Румынии и 7 из Италии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что пятнадцатым окажется доклад учёного из Финляндии.

Ответ:

B11 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ:

B12 Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_п = 15\,°C$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_в = 89\,°C$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры T (°C), причём $x = \alpha \dfrac{cm}{\gamma} \log_2 \dfrac{T_в - T_п}{T - T_п}$ (м), где $c = 4200 \dfrac{Дж}{кг \cdot °C}$ – теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \dfrac{Вт}{м \cdot °C}$ – коэффициент теплообмена, а $\alpha = 2,3$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 138 м?

Ответ:

B13 Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ:

B14 Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 + 4x + 26}$.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi; 3\pi]$.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро равно 18 и высота пирамиды равна $8\sqrt{5}$. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AC и середину L ребра MB.

C3 Решите систему неравенств: $$\begin{cases} \dfrac{3}{3^{x+1} - 2} - \dfrac{2(3^{x+3} - 9)}{7(3^{x+1} - 3)} \le -3, \\ \left(\dfrac{1}{x^2 + 2x - 2} + x^2 + 2x - 2\right)^2 \ge 4. \end{cases}$$

C4 Угол C треугольника ABC равен 30°, D – отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 1 : 4$. Найдите угол A.

Тренировочная работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

14 марта 2013 года

10 класс

Вариант МА0204

Район

Город (населённый пункт).

Школа.

Класс

Фамилия

Имя.

Отчество

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (C1–C4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

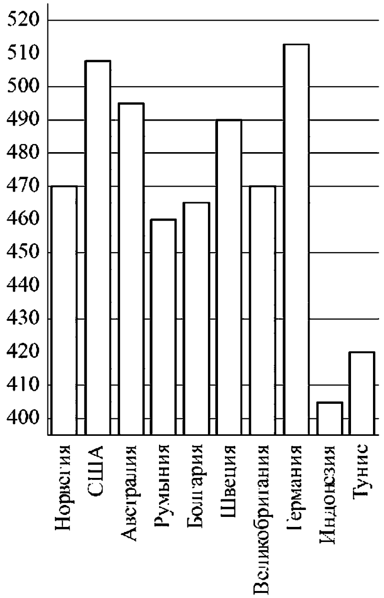
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 В квартире, где проживает А., установлен прибор учёта расхода горячей воды (счётчик). 1 марта счётчик показывал расход 879 куб. м воды, а 1 апреля – 893 куб. м. Какую сумму должен заплатить А. за горячую воду за март, если цена за один куб. м горячей воды составляет 75 р.? Ответ дайте в рублях.

Ответ:

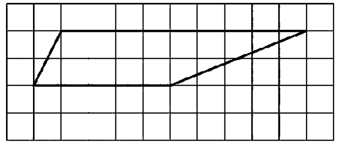
B2 На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале).



По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл отличается от среднего балла болгарских школьников менее чем на 15 (саму Болгарию не считайте).

Ответ:

B3 Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ:

B4 Автомобильный журнал определяет рейтинги автомобилей на основе оценок безопасности S, комфорта C, функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый отдельный показатель оценивается читателями журнала по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите, какой автомобиль имеет наивысший рейтинг. В ответ запишите значение этого рейтинга.

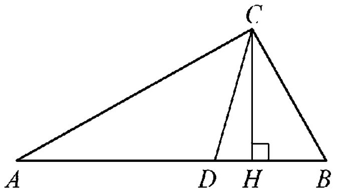
Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4	2	5	5	2
Б	4	1	1	2	4
В	5	5	4	1	1

Ответ:

B5 Решите уравнение $\frac{x-5}{4x+1} = \frac{x-5}{3x-2}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите бо́льший из корней.

Ответ:

B6 Острые углы прямоугольного треугольника равны 59° и 31°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

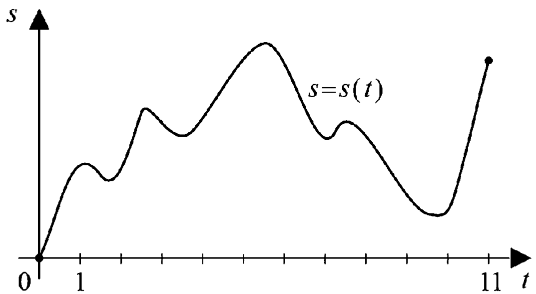


Ответ:

B7 Найдите значение выражения $\dfrac{7\left(\sin^2 11^\circ - \cos^2 11^\circ\right)}{\cos 22^\circ}$.

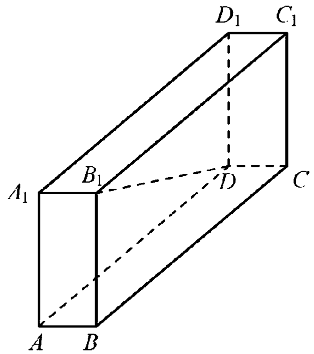
Ответ:

B8 Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 11 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат – расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



Ответ:

B9 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $CC_1 = 4$, $A_1B_1 = 1$, $BC = 8$. Найдите длину диагонали DB_1.

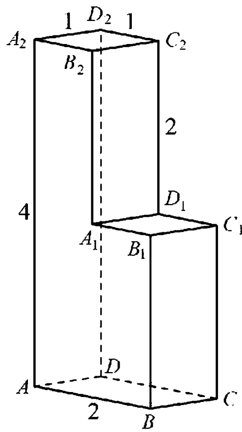


Ответ:

B10 Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны, включая Россию. В первый день 24 выступления, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Ответ:

B11 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ:

B12 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S=\frac{1}{25}\cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность $P = 1{,}425 \cdot 10^{26}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Ответ:

B13 Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 40% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Ответ:

B14 Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 + 6x + 29}$.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С4 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро равно 8 и высота пирамиды равна $2\sqrt{15}$. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через прямую BD и середину F ребра MC.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{3^x - 2} - \dfrac{2(3^{x+2} - 9)}{7(3^x - 3)} \le -3, \\ \left(\dfrac{1}{10x^2 - 21x + 9} + 10x^2 - 21x + 9\right)^2 \ge 4. \end{cases}$$

C4 Угол C треугольника ABC равен 60°, D – отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 1 : 2$. Найдите угол A.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi; 3\pi]$.

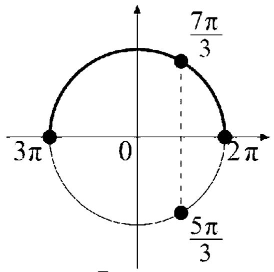
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x\cos x = \sin x;\quad \sin x(2\cos x - 1) = 0;\quad \sin x = 0 \text{ или } \cos x = \frac{1}{2};$$

$$x = \pi k \text{ или } x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi; 3\pi]$: $2\pi,\ \frac{7\pi}{3},\ 3\pi$.



Ответ: а) $\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi, \frac{7\pi}{3}, 3\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро равно 18 и высота пирамиды равна $8\sqrt{5}$. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AC и середину L ребра MB.

Решение.

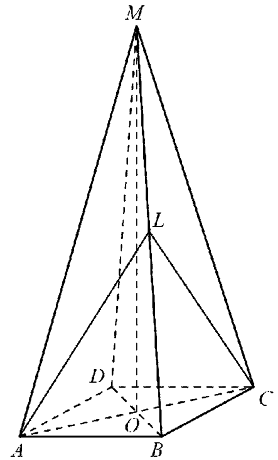
Сечение ACL – равнобедренный треугольник, поскольку в правильной пирамиде боковые грани равны и поэтому $AL = CL$.

Пусть O – середина AC. Тогда OL – высота ΔACL. В прямоугольном треугольнике MOB отрезок OL – медиана и поэтому $OL = \frac{1}{2}MB = 9$.

Основание правильной пирамиды $MABCD$ – квадрат $ABCD$ и поэтому

$$AC = 2OB = 2\sqrt{MB^2 - MO^2} = 2\sqrt{324 - 320} = 4.$$

Следовательно, площадь $S_{ACL} = \frac{1}{2}AC \cdot OL = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 18$.



Ответ: 18.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{3}{3^{x+1}-2}-\dfrac{2(3^{x+3}-9)}{7(3^{x+1}-3)} \le -3, \\ \left(\dfrac{1}{x^2+2x-2}+x^2+2x-2\right)^2 \ge 4. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделаем замену $z=3^{x+1}$, получаем:

$$\frac{3}{z-2}-\frac{18(z-1)}{7(z-3)} \le -3;$$

$\dfrac{(z-1)(z-9)}{(z-2)(z-3)} \le 0;\quad 1 \le z < 2$ или $3 < z \le 9$.

Обратная замена даёт: $-1 \le x < \log_3 \dfrac{2}{3}$ или $0 < x \le 1$.

Решим второе неравенство. Сделаем замену $t = x^2+2x-2$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t}+t\right)^2 \ge 4;\quad \left(\frac{1}{t}-t\right)^2 \ge 0;\quad t \ne 0.$$

Значит, $x \ne -1 \pm \sqrt{3}$. Поскольку $-1-\sqrt{3} < -1$ и $0 < -1+\sqrt{3} < 1$, получаем решение системы:

$$-1 \le x < \log_3 \frac{2}{3};\quad 0 < x < -1+\sqrt{3} \text{ или } -1+\sqrt{3} < x \le 1.$$

Ответ: $\left[-1,\ \log_3 \frac{2}{3}\right),\ \left(0;\ -1+\sqrt{3}\right),\ \left(-1+\sqrt{3};\ 1\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Угол C треугольника ABC равен $30°$, D – отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 1 : 4$. Найдите угол A.

Решение.

Точка D лежит на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle ADB = 90°$. Аналогично, $\angle ADC = 90°$. Следовательно, точка D лежит на прямой BC.

Возможны два случая: точка D лежит либо на отрезке BC (рис.1), либо на продолжении отрезка BC за точку B (рис.2). Точка D не может лежать на продолжении отрезка BC за точку C, так как угол ACB – острый.

Положим $DB = t$, $DC = 4t$. Из прямоугольных треугольников ADC и ABD находим, что

$$AD = CD\cdot \text{tg}30° = \frac{4}{\sqrt{3}}t \text{ и } AB = \sqrt{\frac{19}{3}}\cdot t.$$

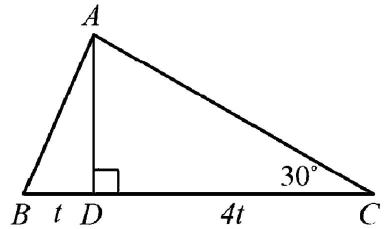


Рис. 1

Рассмотрим первый случай. Легко видеть, что $BC = 5t$. По теореме синусов $\dfrac{\sin A}{BC}=\dfrac{\sin C}{AB}$, или $\dfrac{\sin A}{5t}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{19}{3}}\,t}$, откуда $\sin A = \dfrac{5}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{19}}=\dfrac{5\sqrt{57}}{38}$.

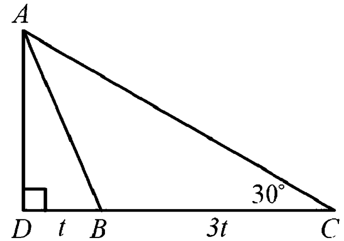


Рис. 2

Во втором случае $BC = 3t$, $\dfrac{\sin A}{3t}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{19}{3}}\cdot t}$, откуда $\sin A = \dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{19}}=\dfrac{3\sqrt{57}}{38}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{5\sqrt{57}}{38}$ или $\arcsin\dfrac{3\sqrt{57}}{38}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

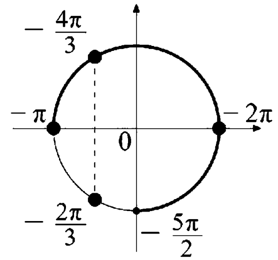
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x\cos x = -\sin x;\ \sin x(2\cos x + 1) = 0;\quad \sin x = 0 \text{ или } \cos x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \pi k \quad \text{или} \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$: -2π, $-\frac{4\pi}{3}$, $-\pi$.



Ответ: а) $\frac{2\pi k}{3}, \pi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро равно 8 и высота пирамиды равна $2\sqrt{15}$. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через прямую BD и середину F ребра MC.

Решение.

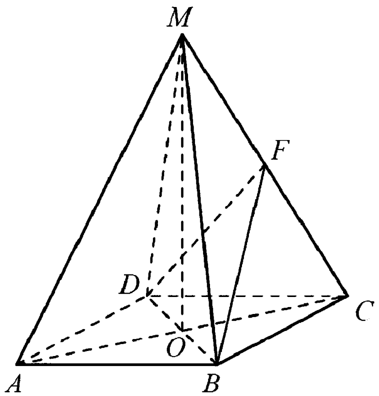
Сечение BDF – равнобедренный треугольник, поскольку в правильной пирамиде боковые грани равны и поэтому $BF = DF$.

Пусть O – середина BD. Тогда OF – высота ΔBDF. В прямоугольном треугольнике MOC отрезок OF – медиана и поэтому $OF = \frac{1}{2}MC = 4$.

Основание правильной пирамиды $MABCD$ – квадрат $ABCD$ и поэтому

$$BD = 2OC = 2\sqrt{MC^2 - MO^2} = 2\sqrt{64-60} = 4.$$

Следовательно, площадь $S_{BDF} = \frac{1}{2}BD \cdot OF = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$



Ответ: 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{3}{3^x-2} - \dfrac{2(3^{x+2}-9)}{7(3^x-3)} \le -3, \\ \left(\dfrac{1}{10x^2-21x+9} + 10x^2 - 21x + 9\right)^2 \ge 4. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделаем замену $z = 3^x$, получаем:

$$\frac{3}{z-2} - \frac{18(z-1)}{7(z-3)} \le -3; \quad \frac{(z-1)(z-9)}{(z-2)(z-3)} \le 0; \quad 1 \le z < 2 \text{ или } 3 < z \le 9.$$

Обратная замена даёт: $0 \le x < \log_3 2$ или $1 < x \le 2$.

Решим второе неравенство. Сделаем замену $t = 10x^2 - 21x + 9$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t} + t\right)^2 \ge 4; \left(\frac{1}{t} - t\right)^2 \ge 0; t \ne 0.$$

Значит, $x \ne 0,6$ и $x \ne 1,5$, причём $0 < 0,6 < \log_3 2$ и $1 < 1,5 < 2$.

Таким образом, получаем решение системы:

$$0 \le x < 0,6; \quad 0,6 < x < \log_3 2; \quad 1 < x < 1,5 \text{ или } 1,5 < x \le 2.$$

Ответ: $[0,\ 0,6),\quad (0,6;\ \log_3 2),\quad (1,\ 1,5),\quad (1,5,\ 2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Угол C треугольника ABC равен 60°, D – отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 1 : 2$. Найдите угол A.

Решение.

Точка D лежит на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle ADB = 90^\circ$. Аналогично, $\angle ADC = 90^\circ$. Следовательно, точка D лежит на прямой BC.

Возможны два случая: точка D лежит либо на отрезке BC (рис.1), либо на продолжении отрезка BC за точку B (рис.2). Точка D не может лежать на продолжении отрезка BC за точку C, так как угол ACB – острый.

Положим $DB = t$, $DC = 2t$. Из прямоугольных треугольников ADC и ABD находим, что $AD = CD \cdot \mathrm{tg}60^\circ = 2t\sqrt{3}$ и $AB = t\sqrt{13}$.

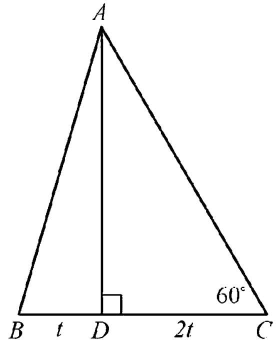


Рис.1

Рассмотрим первый случай. Легко видеть, что $BC = 3t$.

По теореме синусов $\dfrac{\sin A}{BC} = \dfrac{\sin C}{AB}$ или $\dfrac{\sin A}{3t} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t\sqrt{13}}$, отсюда $\sin A = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \dfrac{3\sqrt{39}}{26}$.

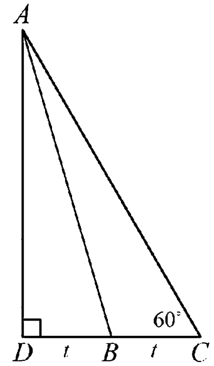


Рис. 2

Во втором случае $BC = t$, $\dfrac{\sin A}{t} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t\sqrt{13}}$, откуда $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{39}}{26}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{3\sqrt{39}}{26}$ или $\arcsin\dfrac{\sqrt{39}}{26}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	13
B2	5
B3	9
B4	9800
B5	9
B6	76,5
B7	14

№ задания	Ответ
B8	6
B9	11
B10	0,25
B11	6
B12	52
B13	12
B14	-2

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	1050
B2	3
B3	14
B4	0,76
B5	5
B6	14
B7	-7

№ задания	Ответ
B8	8
B9	9
B10	0,26
B11	6
B12	5000
B13	50
B14	-3